

**probabilistische  
gevoeligheidsanalyse  
heavingontwerpregels**

**Fase 2 CO-370250/25**

**December, 97**



**probabilistische  
gevoeligheidsanalyse  
heavingontwerpregels**

Fase 2 CO-370250/25  
December, 97

Opgesteld in opdracht van :  
Rijkswaterstaat  
Dienst Weg- en Waterbouwkunde  
Postbus 5044  
2600 GA Delft

afdeling: Wiskunde & Informatica  
projectleider: Dr. Ir. J.B. Sellmeijer  
projectbegeleider: Ir. E.O.F. Calle

**GRONDMECHANICA DELFT**  
Stieltjesweg 2, 2628 CK DELFT  
Postbus 69, 2600 AB DELFT

Telefoon 31-15-2693500  
Telefax 31-15-2610821  
Postrekening 234342  
Bank MeesPierson NV  
Rekening nummer 25.92.35.911



Rapport nr. : CO-370250/25 fase 2		Datum rapport: December, 97			
Titel and sub-titel: Probabilistische Gevoeligheidsanalyse Heavingontwerpregels		Afdeling: Software Ontwikkelingsgroep			
		Projectnaam: Heaving			
Projectleider Dr.Ir. J.B. Sellmeijer		Projectbegeleider: Ir. E.O.F. Calle			
Naam en adres opdrachtgever: Rijkswaterstaat Dienst Weg- en Waterbouwkunde Postbus 5044 2600 GA Delft		Referentie opdrachtgever:			
		verzonden in: 10			
		Type rapport: Definitief			
<p>Samenvatting:</p> <p>Dit rapport behandelt een speciale aanpak van stroming onder dijken en kunstwerken: fragmentenmethode. Er is één enkel fragment ontwikkeld waaraan de naam universeel fragment gegeven is. Hiermee is het mogelijk elke geometrie onder een dijk of kunstwerk voldoende accuraat te fragmenteren.</p> <p>Alle in het verleden gedefinieerde fragmenten kunnen beschreven worden via het universele fragment. Er zijn vier nieuwe typen toegevoegd: gatfragment, lekfragment, zettingsfragment en opdrijffragment. Ook deze zijn opgebouwd uit het universele fragment of een tweetal samengestelde universele fragmenten.</p>					
Opmerkingen:					
Trefwoorden: heaving, fragmentenmethode, kunstwerk probabilistisch, partiële veiligheid			Verspreiding: DWW		
Opgeslagen op: FgmAFDArap2a.DOC			Aantal bladzijden: 94		
Versie:	Datum:	Opgesteld door:	Paraaf:	Gecontroleerd door:	Paraaf:
1.00	97.12.03	Dr.Ir. J.B. Sellmeijer		Ir. E.O.F. Calle	



## Inhoudsopgave

1	Inleiding.....	1
2	Fragmentenmethode.....	3
- I	Principe.....	3
- II	Uitwerking.....	4
3	Beschrijving huidige fragmenten.....	7
- I	Uiterwaardefragment.....	8
- II	Kop- en Staartfragment.....	9
- III	Tussenfragment.....	10
- IV	Achterlandfragment met opdrijven.....	11
- V	Polderfragment.....	12
- VI	Sluisfragment.....	13
4	Universeel fragment.....	15
5	Uitwerking universeel fragment.....	19
6	Huidige fragmenten.....	23
- I	Kop- en Staartfragment.....	23
- II	Tussenfragment.....	24
- III	Pipingfragment.....	25
7	Gat- en Lekfragment.....	29
- I	Lek door gat.....	29
- II	Lek door damwand.....	34
8	Zakkings- en opdrijffragment.....	39
- I	Gemeenschappelijke afleiding.....	39
- II	Zettingsfragment.....	44
- III	Opdrijffragment.....	47
- i	netto debiet naar de spleet.....	50
- ii	geen netto debiet naar de spleet.....	50
- iii	alleen debiet naar de spleet.....	51

---

9	Casestudies .....	55
- I	Rivierdijk zonder berm achter de damwand .....	55
- i	geen gat, geen lek .....	56
- ii	alleen gat, geen lek .....	56
- iii	geen gat, alleen lek .....	58
- II	Rivierdijk met opdrijvend achterland .....	59
- III	Sluis met dichte kolkvloer .....	61
- IV	Sluis met open kolkvloer .....	64
10	Numerieke bepaling Elliptische Functies .....	65
11	Samenvatting en conclusies .....	71
12	Referenties .....	73
A	Uitwerking van het potentiaalvlak .....	a
B	Positionering karakteristieke punten .....	g
C	Voorbeelden programmatuur .....	k



## Symbolenlijst

### *variabelen*

$d$	[m]	: damwandlengte
$h$	[m]	: verval
$i$	[-]	: verhang
$k$	[m/s]	: doorlatendheid
$\ell$	[m]	: inspringlegte
$w$	[-]	: geometriehulpvlak
$x,y$	[m]	: coördinaten
$z$	[m]	: complexe geometrie
$D$	[m]	: fragmentdikte
$L$	[m]	: fragmentlengte
$P$	[m <sup>2</sup> /s]	: potentiaalval
$Q$	[m <sup>2</sup> /s]	: doorstroomd debiet
$W$	[-]	: weerstand
$\varphi$	[m]	: stijghoogte
$\zeta$	[m]	: potentiaalhelpvlak
$\Phi$	[m <sup>2</sup> /s]	: potentiaal
$\Psi$	[m <sup>2</sup> /s]	: stroomfunctie
$\Omega$	[m <sup>2</sup> /s]	: complexe potentiaal

### *elliptische functies*

$K(m)$	: volledige elliptische integraal van de eerste soort
$E(m)$	: volledige elliptische integraal van de tweede soort
$\Pi(n m)$	: volledige elliptische integraal van de derde soort
$F(\varphi  m)$	: onvolledige elliptische integraal van de eerste soort
$E(\varphi  m)$	: onvolledige elliptische integraal van de tweede soort
$\Pi(n;\varphi  m)$	: onvolledige elliptische integraal van de derde soort
$\varphi$	: amplitude
$m$	: parameter

$n$	: karakteristiek
$u$	: argument
$\operatorname{sn}(u m)$	: Jacobijnse elliptische functie ( $\sin\varphi$ )
$\operatorname{cn}(u m)$	: Jacobijnse elliptische functie ( $\cos\varphi$ )
$\operatorname{dn}(u m)$	: Jacobijnse elliptische functie (delta amplitude)

***indexering***

b	: bovenstrooms
o	: benedenstrooms
G	: gat
L	: links
R	: rechts
S	: spleet

# 1 Inleiding

De twee belangrijkste vormen van sijperosie bij dijken en kunstwerken zijn heaving en piping. Heaving is het in gevaar komen van de stabiliteit langs een kwelscherm door het wegvallen van de korrelspanningen door een opwaarts gerichte stroming. Dit wordt ook wel 'grondbreuk' genoemd naar de Duitse benaming Grundbruch. Piping is het vormen van horizontale erosiekanalen onder dijken en kunstwerken door te hoge stromingsdrukken. De Nederlandse benaming hiervoor is onderloopsheid.

Dijken en kunstwerken dienen zo gedimensioneerd te worden dat het gevaar voor sijperosie kleiner is dan een aanvaardbaar kleine kans. Het gevaar helemaal wegnemen kan niet, omdat er altijd een kans is dat de belasting hoger uitvalt en de sterkte minder is dan verwacht. Daarom wordt de kans op bezwijken via statistische methoden als Monte Carlo en AFDA bepaald en gelimiteerd.

Rijkswaterstaat, Dienst Weg- en Waterbouwkunde, heeft Grondmechanica Delft verzocht een statistisch rekenmodel te maken om de onzekerheid van het bezwijken van een waterkerende constructie in een kans uit te drukken. Dit onderzoek heet 'gevoeligheidsanalyse heaving ontwerpregels'. Zoals de naam al suggereert, wordt hierin voorlopig alleen heaving meegenomen. Het faalcriterium voor heaving is eenvoudig. Dat voor piping is gecompliceerd en moet eerst deterministisch naar behoren worden uitgewerkt.

Van belang bij dit onderzoek is een geohydrologische beschrijving van een ontwerp voor een waterkerende constructie. Dit betreft een deterministische oplossing van het stromingsprobleem. Hierin worden later onzekerheden in de belasting en sterkte aangebracht, waarna de kans op bezwijken wordt vastgelegd. Dit vinden van oplossingen voor het stromingsprobleem is fase 2 uit het gehele onderzoek. Dit rapport houdt zich alleen met deze fase 2 bezig. Het wordt later opgenomen in een algemeen rapport over de gehele studie.

De stromingsoplossing moet een zodanig flexibele vorm hebben, dat er in de latere fase van het onderzoek mee gemanipuleerd kan worden binnen het statistische rekenmodel. Daarom is een analytische uitwerking vereist en komt een numerieke benadering niet in aanmerking. Voor tweedimensionale problemen is een aanpak via conforme afbeeldingen krachtig. Deze methodiek zal hier dan ook worden aangewend.

Het profiel van een waterkerende constructie is over het algemeen te complex om een oplossing voor het geheel toe te laten. Daarom wordt de geometrie gesplitst in compartimenten, die fragmenten genoemd worden. Voor elk fragment wordt een specifieke oplossing bepaald, die uiteindelijk neerkomt op het bepalen van een zogenaamde weerstand. Dit is het quotiënt van potentiaalval en doorstroomdebiet. De totale oplossing wordt samengesteld uit de som over de weerstanden van de afzonderlijke fragmenten.

Het is de kunst de geometrie van een fragment zodanig te definiëren dat met zo weinig mogelijk typen een heel ontwerp kan worden opgebouwd. Het is gelukt dit terug te brengen tot één enkel type, dat zal

worden aangegeven met de term 'universeel fragment'. Zelfs onderloopsheid, dat voorlopig niet tot de studie behoort, kan ermee worden aangepakt. Voor sommige complicaties in de stroming, zoals een gat in een kwelscherm of opdrijven van een binnentalud, dient een fragment opgedeeld te worden in twee subfragmenten, die vervolgens worden samengesteld. De beschrijving van het universeel fragment speelt zich geheel af binnen de sfeer van elliptische functies. Voor de numerieke bewerking van de resultaten dient dan ook een elliptische bibliotheek ter beschikking te staan.

Er zal worden getoond, dat het universeel fragment de in eerdere studies al bepaalde fragmenten in zich verenigt, zoals kop- tussen- en staartfragment en polderfragment. Daarnaast kan het worden ingezet voor het in kaart brengen van nieuwe fragmenten, zoals zettingsfragment en als fragment met lekkende en niet goed aansluitende damwand. Daartoe worden bijvoorbeeld twee universele fragmenten tegen elkaar geplaatst en wordt de lek door gat of damwand op elkaar afgeregeld.

Dit rapport over fase 2 is als volgt opgebouwd. Eerst zal de fragmentenmethode beschreven worden in zijn algemeenheid. Vervolgens worden alle fragmenten die al in een eerder kader gespecificeerd zijn beschreven. In het kort wordt aangegeven waar ze voor dienen en wat hun bijzonderheden zijn. De analytische beschrijving wordt gepresenteerd in de vorm van een weerstand en er wordt een tekening van het fragment getoond. Dit wordt overgenomen uit de eerdere rapportage van de opstartfase 1.

Het universele fragment wordt afgeleid. Er wordt getoond hoe de nog ontbrekende fragmenten kunnen worden samengesteld uit dit universele fragment. Deze betreffen: fragment met lekkende en niet goed aansluitende damwand; zettingsfragment; opdrijffragment. Voor elk fragment wordt de weerstand gespecificeerd. Deze wordt later gebruikt in de statistische analyse.

## 2 Fragmentenmethode

Bij waterkerende constructies is het van belang de kwel er onderdoor goed in kaart te brengen. Het waterbezwaar is dan bekend en het verval kan dan zodanig begrensd worden dat erorieverschijnselen zoals heaving voorkomen kunnen worden. Voor een grillige geometrie kan hiertoe met behulp van een grondwaterstromingsprogramma een numerieke berekening gemaakt worden. Hier, echter, gaat de voorkeur uit naar een analytische regel, waarmee snel en eenvoudig het statistisch algoritme gevoed kan worden.

Er is dan behoefte aan een handzame analytische oplossing van de stroming. Voor twee-dimensionale problemen kan een vruchtbaar gebruik gemaakt worden van de methode van complexe afbeeldingen. Hierbij wordt het verband tussen het complexe geometrievlak en het complexe potentiaalvlak gevonden door de randen van deze vlakken over elkaar heen te leggen. De methode is vrijwel universeel toepasbaar bij stationaire problemen met redelijk rechte randen. Een vrije waterspiegel is geen probleem.

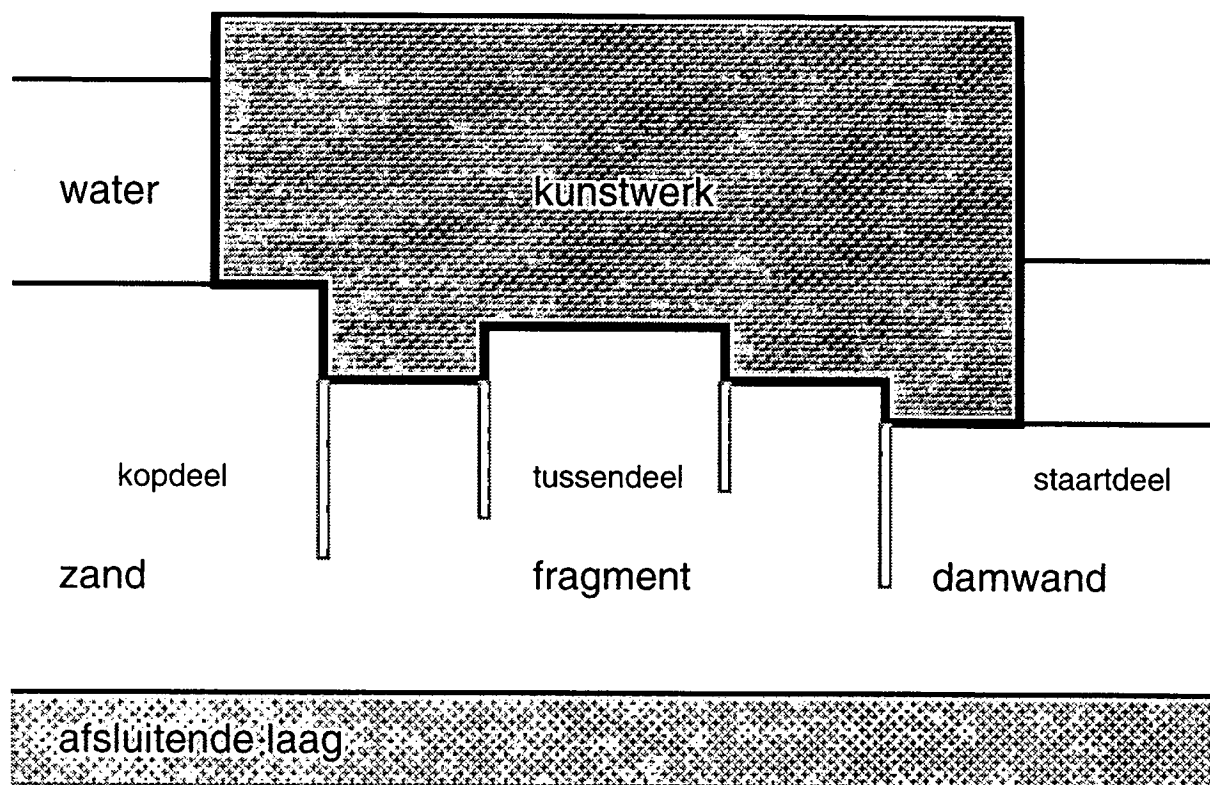
Bij kunstwerken worden meerdere kwelschermen toegepast. Hierdoor wordt de geometrie zodanig ingewikkeld van vorm, dat de mathematische beschrijving niet meer in gesloten vorm bepaald kan worden. Dit maakt de oplossing ondoorzichtig. Het is mogelijk de oplossing op te splitsen in een aantal deeloplossingen, die alle eenvoudig van vorm zijn en samengesteld de oplossing van het probleem weergeven. Hierbij wordt een geringe mate van benadering geaccepteerd.

De methode van opsplitsen van een probleem in deelgebieden wordt 'fragmentenmethode' genoemd. Door Pavlovsky is dit al in 1935 voorgesteld. In zijn verzamelde werken, Pavlovsky (1956), staat de methode beschreven. In principe wordt het watervoerende pakket in mootjes gehakt. Dit gebeurt op karakteristieke plaatsen, waar de stroming een gedwongen verloop heeft. Op de overgangen wordt gezorgd voor een continu stromingsverloop.

### - I Principe

Kleidijken bevatten vaak een semipermeabel voorland in de vorm van een uiterwaarde. Kunstwerken hebben dikwijls een aantal verticale kwelschermen. De afsluitende laag hoeft ook niet vlak te zijn, wat betekent dat het doorstroomde pakket niet constant van dikte is. Een simpele schematisatie van dijk of kunstwerk als rechte vloer voldoet dan niet. Om hieraan tegemoet te komen worden er compartimenten van een bepaalde dikte onderscheiden, waarin zich een bepaalde vorm van stroming afspeelt. In *Figuur 2.1* is een voorbeeld gegeven voor een kunstwerk.

Het is duidelijk dat het vinden van een oplossing voor deze geometrie moeilijk is en ondoorzichtig van karakter. Daarom wordt het probleem opgedeeld. Het ligt voor de hand de fragmenten te kiezen langs de verticale damwanden. Het uitgangspunt daarbij is, dat een potentiaallijn door de voet van een damwand min of meer verticaal zal staan. Dit betekent dat de stroming in zo'n fragment redelijk goed bepaald kan worden voor nog onbekende stijghoogten ter weerszijden. Vervolgens kunnen de



*Figuur 2.1: sluisontwerp met kwelchermen*

fragmenten aan elkaar geknoopt worden door de stijghoogten op de overgangen aan elkaar gelijk te stellen en gebruik te maken van het feit dat door elk fragment een even groot debiet stroomt.

Opdeling langs de verticale damwanden is niet de enige optie. Tussen twee damwanden in kunnen de potentiaalijnen ook redelijk verticaal staan. Er is dan geen enkel bezwaar om een fragment te beschouwen, dat inwendig een damwand bevat. Dit is wel gecompliceerder van uitwerking dan een fragment met damwanden op de randen.

Fragmenten met ingesloten damwand zijn aantrekkelijk, als er lek optreedt of de damwand niet goed aansluit. De lek wordt dan volledig betrokken in de weerstand van het onderhavige fragment. Als de damwand op de rand ligt worden ook de naburige fragmenten betrokken. De integriteit van de fragmenten komt hierdoor in het geding. Dit zal uitgebreid besproken worden bij de afleiding van de nieuwe fragmenten.

## **- II Uitwerking**

Het is duidelijk dat een grondwaterstromingsoplossing per fragment aanmerkelijk minder moeilijk is dan de uitwerking van een oplossing voor het geheel. De fragmenten in de figuur zijn rechthoekig, evenals de bijbehorende potentiaalvlakken. Hiervoor zijn standaard afbeeldingen beschikbaar, die geformuleerd zijn in zogenaamde elliptische functies. Dit zijn krachtige wiskundige relaties, die als eigenschap hebben, dat ze een rechthoek afbeelden op een halfvlak. In het afstudeerwerk van Van de Paverd (1994) en Heaving bij kunstwerken, Sellmeijer (1995), staat dit beschreven.

De oplossing van een fragment bestaat uit een relatie tussen de potentiaalval over het fragment en het doorstroomde debiet. Het quotiënt van beide wordt aangegeven als weerstand  $W$ . Omdat het debiet constant is voor alle fragmenten is de som van alle weerstanden gelijk aan de potentiaalval over het kunstwerk gedeeld door het debiet. In formulevorm:

$$\frac{kh}{Q} = \sum_{n=1}^N \frac{P_n - P_{n-1}}{Q} = \sum_{n=1}^N W_n \quad (2.1)$$

$P$  is de potentiaal, het product van verval en doorlatendheid;  $Q$  is het debiet. Het aantal fragmenten is  $N$ .

Bij heaving geldt voor het verhang over de laatste damwand een stabiliteitsvoorwaarde. De korrelspanningen mogen niet verdwijnen. Het verhang is dus naar boven begrensd. Via de fragmentenmethode is dit verhang uit te drukken in de weerstanden:

$$\frac{\varphi_N - \varphi_{N-1}}{d_{N-1}} = \frac{P_N - P_{N-1}}{Q} \frac{Q}{k d_{N-1}} = \frac{h}{d_{N-1}} \frac{W_N}{\sum_{n=1}^N W_n} \quad (2.2)$$

$\varphi$  is de stijghoogte;  $d$  de damwandlengte. Er wordt dus gewerkt met het gemiddelde verhang. Door gebruik te maken van (2.1) is het verhang uitgedrukt in alle bepaalde weerstanden.





### 3 Beschrijving huidige fragmenten

Er zijn in het kader van ander onderzoek al enige fragmenten beschreven. Heaving, bijvoorbeeld, is al voor een groot deel in kaart gebracht. Hier zijn kop-, tussen- en staartfragmenten onderscheiden. De oplossingen hiervan zijn opgenomen in een rekenprogramma. Dit is deterministisch van opzet, waarbij een veiligheidscoëfficiënt kan worden opgegeven. In Sellmeijer (1995), 'Heaving bij Kunstwerken' is dit gerapporteerd. In Van de Paverd (1994), 'Kwelschermen onder rivierdijken (Onderzoek)' is lek door uiterwaarden beschreven.

Een aparte categorie zijn de fragmenten die sijperosie bevatten. Vanuit een uittreepunt aan de benedenstroomse zijde kan zich een erosiekanaal ontwikkelen ten gevolge van hoge stromingsdrukken. Dit verschijnsel wordt piping of onderloopsheid genoemd. In het erosiekanaal is een aparte randvoorwaarde ontwikkeld. Deze kan uitstekend meegenomen worden in een eindfragment. In Sellmeijer (1996), 'Integratie Ontwerpregels Piping & Heaving', staat dit beschreven.

Er zal nu een overzicht gegeven worden van alle relevante fragmenten. Zij worden één voor één kort genoemd bij een karakteristieke naam, een schets ervan wordt gepresenteerd en de weerstand wordt gespecificeerd.

## - I Uiterwaardefragment

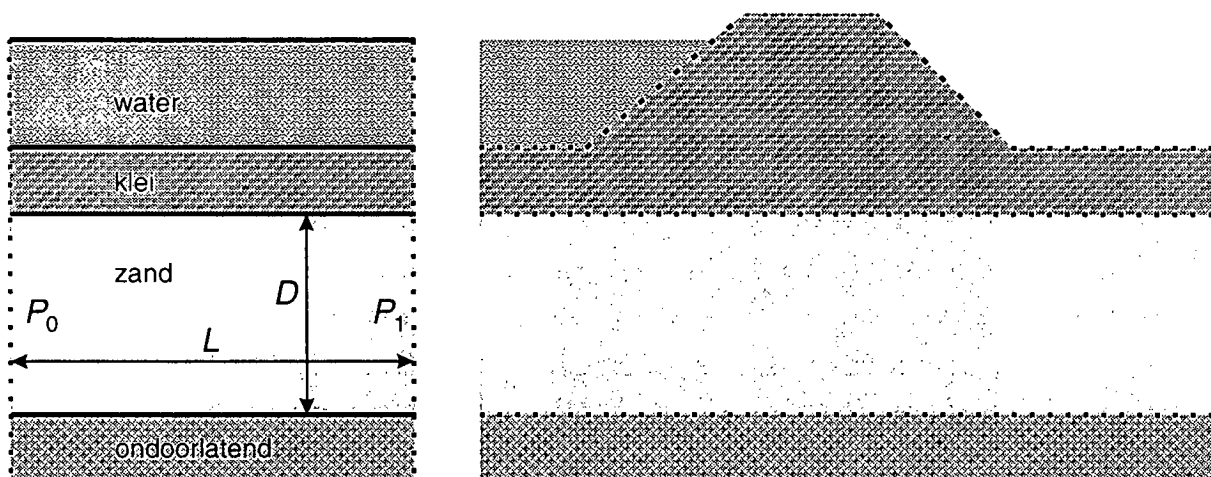
Het uiterwaardefragment vertegenwoordigt het voorland van de dijk, dat bij hoogwater onder water staat. Een voorbeeld hiervan is de uiterwaarde bij een rivier. Het hoge water staat tot aan de dijk en veroorzaakt aan de bovenkant van de kleilaag de rivierpotentiaal, terwijl de potentiaal aan de onderzijde lager is ten gevolge van de kwel. Het gevolg is een extra voeding via lek door de kleilaag. In *Figuur 3.1* is dit geschetst.

In Van de Pavard (1994), 'Kwelschermen onder rivierdijken (Onderzoek)', is hier aandacht aan besteed. Er is verondersteld dat het voorland oneindig lang is. De lek is vertegenwoordigd door de zogenaamde leklengte  $\Lambda$ . Deze lengte heeft over het algemeen een grote waarde, veel groter dan de werkelijke lengte van het voorland. Het is daarom realistischer te werken met een eindig voorland. De formulering is daarom aangepast.

De weerstand voor het uiterwaardefragment luidt:

$$W = \frac{\Lambda}{D} \tanh\left(\frac{L}{\Lambda}\right) \quad (3.1)$$

Als het voorland oneindig lang is, wordt de  $\tanh$  gelijk aan 1 en wordt het resultaat van Van de Pavard verkregen. Voor hele grote leklengten wordt de  $\tanh$  gelijk aan zijn argument, wat betekent dat de lek geen enkele rol speelt.



*Figuur 3.1: uiterwaardefragment*

## - II Kop- en Staartfragment

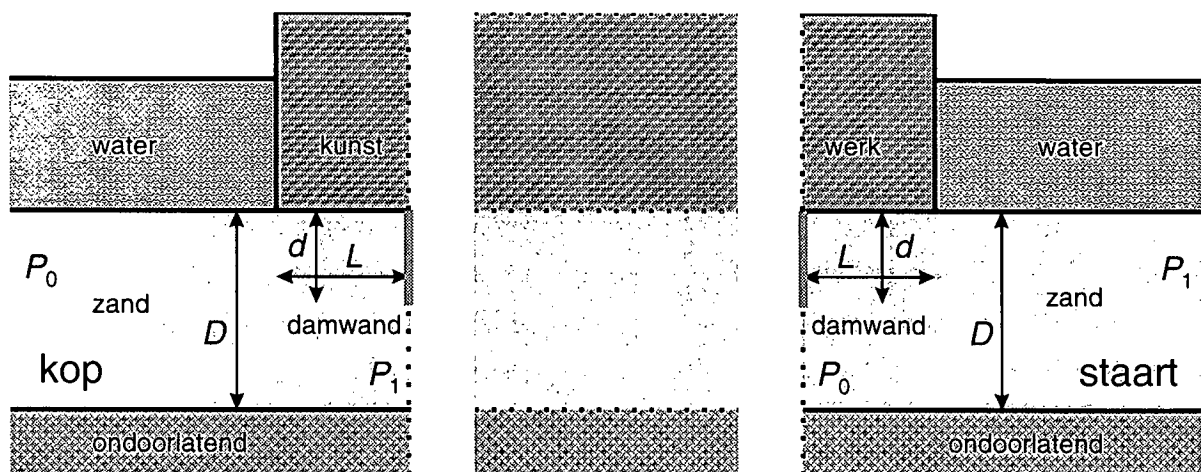
Bij kunstwerken zoals sluizen bestaat de bodem uit een betonnen vloer. Vanuit de vloer steken een aantal damwanden het zandpakket in. In *Figuur 2.1* is dit weergegeven. Hierbij zijn drie typen fragmenten te onderscheiden: een kop-, tussen- en staartfragment. De eerste en laatste zijn gespiegeld en vertonen hetzelfde gedrag. In *Figuur 3.2* zijn dit kop- en staartfragment gedetailleerd weergegeven.

Er is verondersteld dat voor- en achterland oneindig ver doorlopen. Dit is een redelijke veronderstelling. Kop- en staartfragment hebben elk hun eigen dimensionering. In de figuur is dit niet nader aangegeven. De mathematische formulering is voor beide identiek.

Dit soort fragmenten zijn bestudeerd in Sellmeijer (1995), 'Heaving bij Kunstwerken'. De weerstand is van de volgende vorm:

$$W = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad \mu = \frac{\cos\left(\frac{\pi d}{2D}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi L}{2D}\right)} \quad (3.2)$$

$K$  is een zogenaamde volledige elliptische integraal van de eerste soort. De damwandlengte en de uitkragende lengte van het kunstwerk mogen elk nul zijn, maar niet tegelijkertijd. Anders treedt er kortsluiting op tussen buiten- en binnenwater.



*Figuur 3.2: kop- en staartfragment*

### - III Tussenfragment

Bij kunstwerken zijn reeds de kop- en staartfragmenten behandeld. Alle elementen hiertussen worden tussenfragmenten genoemd. In *Figuur 3.3* is zo'n fragment aangegeven. Elk tussenfragment heeft zijn eigen dimensies. Zij hoeven dus niet alle even hoog te zijn. De enige voorwaarde waaraan voldaan moet worden is dat de fragmenten aansluiten op de overgangen.

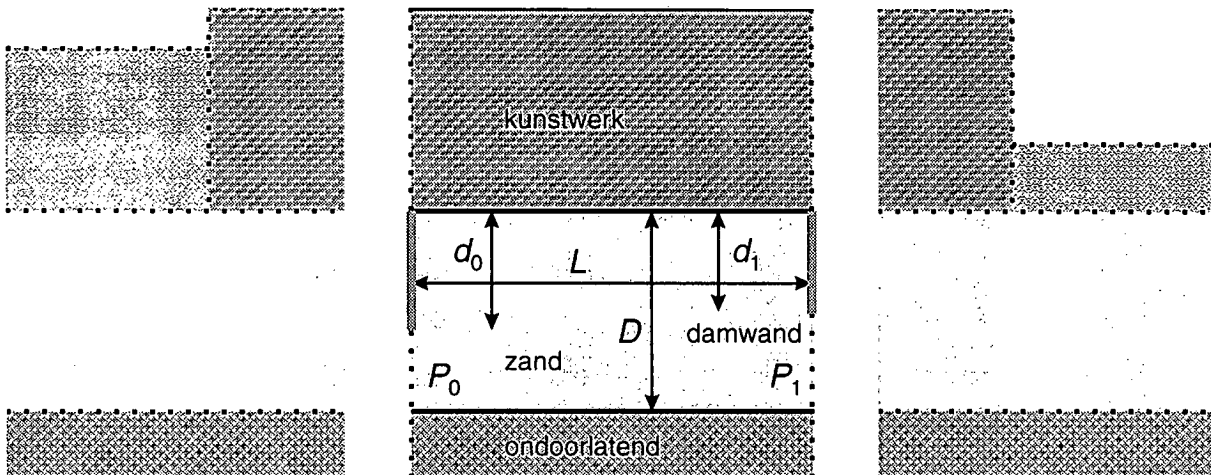
Dit soort fragmenten zijn bestudeerd in Sellmeijer (1995), 'Heaving bij Kunstwerken'. De weerstand is van de volgende vorm:

$$W = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad \frac{L}{D} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad (3.3)$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{m}} = \operatorname{sn}\left\{\frac{D-d_0}{D}K(m)|m\right\} \operatorname{sn}\left\{\frac{D-d_1}{D}K(m)|m\right\}$$

Net zoals bij het kop- en staartfragment bestaat de weerstand uit volledige elliptische integralen van de eerste soort (K). Het argument ervan zit nu iets lastiger in elkaar. Hier spelen Jacobijnse elliptische functies een rol (sn).

Deze weerstand geldt voor het geval dat er een goede aansluiting is tussen watervoerend pakket en vloer van het kunstwerk. Indien daar een spleet aanwezig is, treedt er kortsluiting van de stroming op. Hierdoor verandert het karakter van de weerstand aanzienlijk.



*Figuur 3.3: tussenfragment*

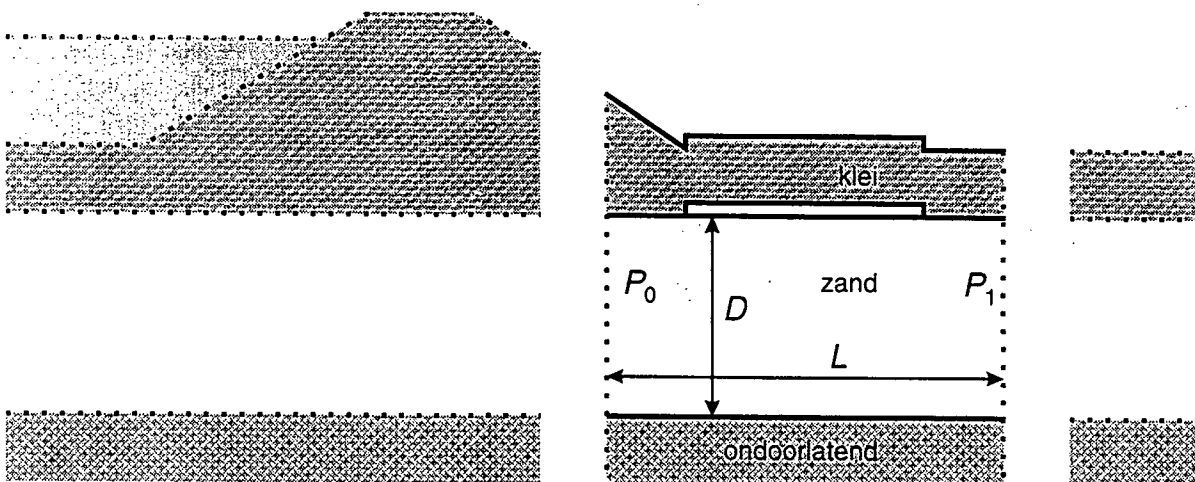
## - IV Achterlandfragment met opdrijven

Bij stroming onder dijken door drukt het grondwater tegen de onderkant van de dijk aan. Bij een verjonging van de dijk kan het dan voorkomen dat de dijk niet genoeg gewicht heeft en lokaal gaat opdrijven. In *Figuur 3.4* is dit schematisch aangegeven. In Van de Paverd (1994), 'Kwelschermen onder rivierdijken (Onderzoek)', is hier aandacht aan besteed.

Daar is een oplossing aangegeven voor de dijk als geheel. Er is dus geen fragment onderscheiden, dat het verschijnsel van opdrijven incorporeert. Het heeft geen zin de vermelde formules over te nemen, daar ze niet passen in het tot nu toe gevolgde concept.

Allereerst zal er een geometrie gedefinieerd moeten worden, waarin dit opdrijven wordt opgenomen. Dit is niet zo gemakkelijk als het lijkt. De druk is gerelateerd aan het gemiddelde gewicht van de opgedreven kleilaag, maar de lengte van opdrijven ligt nog niet vast. Deze is zodanig bepaald, dat het netto debiet naar de open ruimte nul is. Immers, verder omhoog duwen sleept de naburige laag mee omhoog, net zolang totdat er een stabiele situatie ontstaat.

Er is echter ook een ander scenario mogelijk. De grond kan lokaal openscheuren. Het teveel aan water kan dan afvloeien. Hierbij zal opdrijven overgaan in onderloopsheid. Onderzocht moet worden of opdrijven geheel verdwijnt of dat opdrijven en onderloopsheid in serie achter elkaar kunnen optreden. Later in dit rapport zullen enkele scenario's worden bestudeerd. Ook zal een adequaat fragment worden gedefinieerd.



*Figuur 3.4: achterlandfragment met opdrijven*

### - V Polderfragment

Aan de binnenzijde van een dijk is het afdichtende pakket dun en kan opbarsten optreden. Dit gebeurt bij voorkeur ter plaatse van een afwateringssloot. Vanuit een aldus gecreëerd uittreepunt ontwikkelt zich dan een erosiekanaal. Dit verschijnsel wordt piping of onderloopsheid genoemd. Hiervoor is een apart fragment ontwikkeld: polderfragment.

In Sellmeijer (1996), 'Integratie Ontwerpregels Piping & Heaving', is hier aandacht aan besteed. Er is verondersteld dat het achterland oneindig lang is. Verder dat er geen water wegstroomt naar het achterland. Alle debiet gaat dus door het uittreepunt in de sloot. Het erosiekanaal heeft een boven- en benedendeel. In *Figuur 3.5* is een schets van de geometrie gegeven. De verticale afmeting van het erosiekanaal is voor de duidelijkheid overdreven groot getekend.

De weerstand voor het polderfragment luidt:

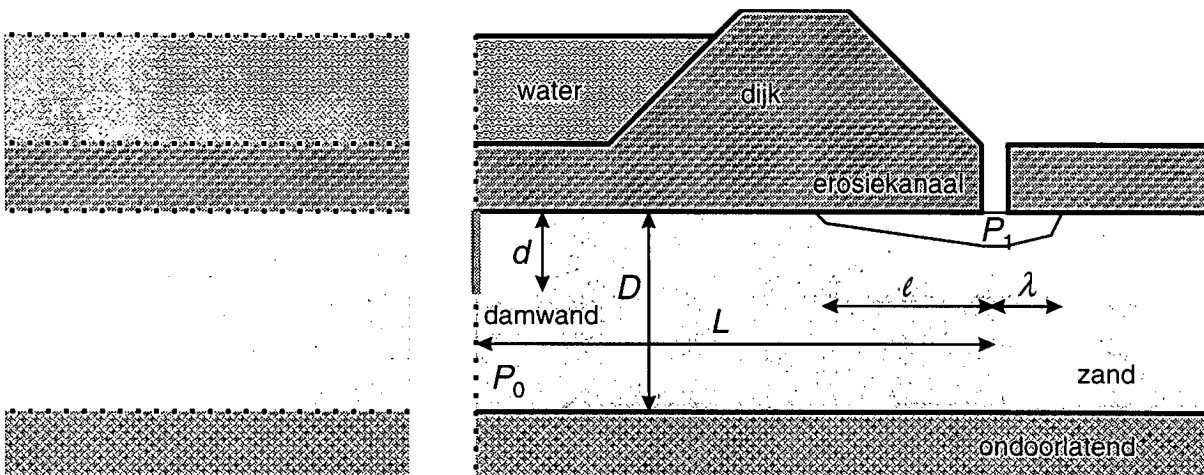
$$W = \frac{\int_{L-\ell}^{L+\lambda} q(r) F(r, L) dr}{\int_{L-\ell}^{L+\lambda} q(r) dr}$$

$$F(r, x) = \frac{2}{\pi} \arccot \coth \sqrt{\frac{\tanh^2\left(\frac{\pi r}{2D}\right) + \tanh^2\left(\frac{\pi d}{2D}\right)}{\tanh^2\left(\frac{\pi x}{2D}\right) + \tanh^2\left(\frac{\pi d}{2D}\right)}}$$

$$p(x) = \int_{L-\ell}^{L+\lambda} q(r) \frac{d}{dx} F(r, x) dr \quad Q(x) = \int_{L-\ell}^x q(r) dr \quad \text{of} \quad \int_x^{L+\lambda} q(r) dr \quad (3.5)$$

$$Cq(x) + |p(x)| \left\{ \frac{3}{\pi\eta} \frac{a(x)}{b} + 1 \right\} \cot \vartheta = \frac{\gamma_p - \gamma_w}{\gamma_w} \quad a(x) = 12\kappa \frac{Q(x)}{p(x)}$$

Het probleem is beschreven in een nader te bepalen grootte van het verticale debiet  $q$  naar het erosiekanaal. De positie in het kanaal is aangegeven met  $x$  of  $r$ , gemeten vanaf de damwand. Elke bijdrage aan het verticale debiet heeft een invloedsfunctie op de potentiaal, aangegeven met  $F$ . Welke functie hierin moet worden gebruikt, de  $\arctan$  of de  $\operatorname{arctanh}$ , hangt af van de grootte van het argument.



*Figuur 3.5: polderfragment*

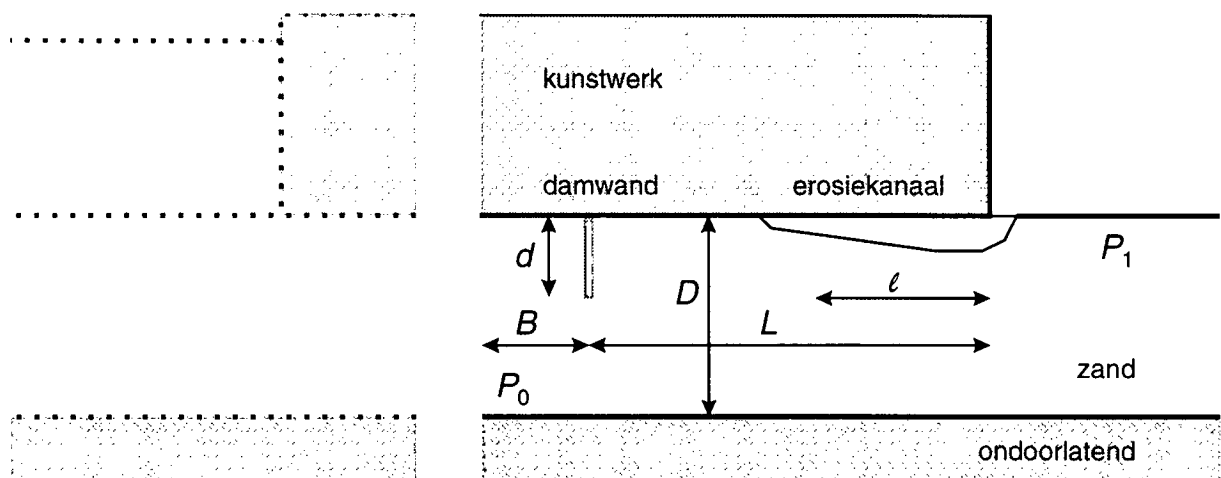
Integratie van het verticale debiet levert het doorstroomdebiet op. Hierbij dient erop gelet te worden of de positie  $x$  bovenstrooms of benedenstrooms van het intredepunt ligt. Het doorstroomdebiet wordt gerekend ten opzichte van beide uiteinden. De grootte van het verticale debiet is bepaald door de erosievoorwaarde. Deze geeft aan dat de grenstoestand van rollend evenwicht niet overschreden wordt.

## - VI Sluisfragment

Een sluis bestaat in zijn meest eenvoudige vorm uit een sluisvloer, enkele kwelschermen en een open in- en uitteevlak, gevormd door de kanaalbodem. Vanuit het uitteevlak kan zich een erosiekanaal ontwikkelen. Ook dit is een vorm van piping of onderloopsheid. Het fragment dat hiervoor is ontwikkeld heet 'sluisfragment'.

In Sellmeijer (1996), 'Integratie Ontwerpregels Piping & Heaving', is hier aandacht aan besteed. Er is verondersteld dat het achterland oneindig lang is. Het ligt voor de hand om het fragment te begrenzen door recht onder de damwand een potentiaallijn te veronderstellen. Echter, dit leidt tot een moeizame mathematische beschrijving. Daarom is het fragment voorbij de damwand onbeperkt ver doorgetrokken. Deze geometrie leidt tot een gesloten oplossing. Ver genoeg voorbij de damwand zijn de potentiaallijnen redelijk verticaal, zodat goed aangesloten kan worden op andere fragmenten. In *Figuur 3.6* is een schets van de geometrie gegeven. De verticale afmeting van het erosiekanaal is voor de duidelijkheid overdreven groot getekend.

De weerstand voor het sluisfragment luidt:



*Figuur 3.6: sluisfragment*

$$W = \frac{\int_{L-\ell}^{L+\lambda} q(r) F(r, L) dr}{\int_{L-\ell}^{L+\lambda} q(r) dr}$$

$$\frac{\pi}{2} F(r, x) = \frac{\operatorname{arctanh} \sqrt{1 - \frac{w(x)}{w(L)}}}{\sqrt{1 - \frac{w(r)}{w(L)}}} - \operatorname{arc} \coth \sqrt{1 - \frac{w(x)}{w(L)}}$$

$$w(x) = \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{\pi x}{2D}\right)}{\cos\left(\frac{\pi d}{2D}\right)} \pm \sqrt{\frac{\cosh^2\left(\frac{\pi x}{2D}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi d}{2D}\right)} - 1} \right\}^2 \quad (3.6)$$

$$p(x) = \int_{L-\ell}^L q(r) \frac{d}{dx} F(r, x) dr$$

$$Q(x) = \int_{L-\ell}^x q(r) dr$$

$$Cq(x) + |p(x)| \left\{ \frac{3}{\pi\eta} \frac{a(x)}{b} + 1 \right\} \cot \vartheta = \frac{\gamma_p - \gamma_w}{\gamma_w}$$

$$a(x) = 12\kappa \frac{Q(x)}{p(x)}$$

In de expressie voor  $w(x)$  staat een plus/minus teken. Dit teken geeft aan dat voor een positief argument de plus gehanteerd moet worden en voor een negatief argument een min.  $A$  is een bovenstroomst te kiezen rand op enige afstand van de damwand. De erosievoorwaarde is universeel geldig bij onderlooptheid. Het is precies dezelfde als die bij het polderfragment is toegepast.



## 4 Universeel fragment

Er zijn zes soorten fragmenten aan de orde geweest. Bij een aantal valt de begrenzing samen met het vlak door een kwelscherm. Kop-, Tussen- en Staartfragment en Polderfragment zijn hier voorbeelden van. Bij andere ligt de begrenzing een eindje van de schermen af, waar verwacht mag worden dat de potentiaalvlakken min of meer verticaal staan. Dit is het geval bij het Sluisfragment en het Uiterwaardefragment. Ook het Achterlandfragment komt hiervoor in aanmerking.

Er is al aangegeven in hoofdstuk 2, Fragmentenmethode, dat er twee reële opties zijn om fragmenten te specificeren. Een verticaal vlak ter plaatse van een kwelscherm of een verticaal vlak voldoende ver er vanaf. Deze twee sluiten elkaar niet uit. Zij mogen apart gebruikt worden of gecombineerd. Juist de combinatie zal de flexibiliteit van de fragmenten enorm doen toenemen.

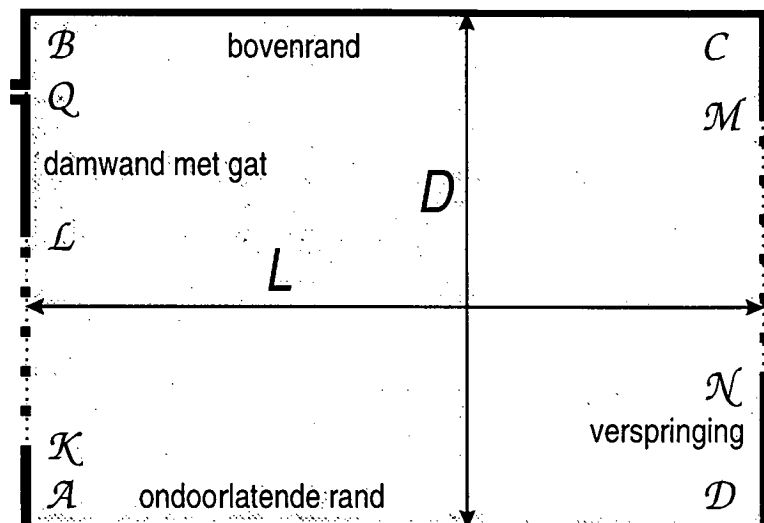
Er is al geconstateerd dat Kop- en Staartfragment dezelfde achtergrond hebben. Zij zijn gespiegeld ten opzichte van elkaar. Op hun beurt lijken ze weer sterk op een tussenfragment, waar een van beide damwanden verwijderd is en de sluisvloer niet over het hele fragment doorloopt. Het Polderfragment ziet er ook eender uit en heeft als extra een bron. Dit alles werpt de vraag op of er niet één enkel fragment gemaakt kan worden, waaruit alle fragmenten kunnen worden samengesteld.

Hierbij moet niet alleen rekening gehouden worden met de al afgeleide fragmenten, maar ook met de nog ontbrekende. Een niet goed aansluitende sluisvloer, een lekkende of niet goed aansluitende damwand en een opdrijvende berm moeten nog gemodelleerd worden. Het blijkt dat een fragment van de vorm van *Figuur 4.1* de benodigde flexibiliteit in zich heeft om alle gewenste geometrieën in zich te verenigen.

In feite staat hier een tussenfragment. Er is een goed aansluitende bovenrand  $BC$ ; een ondoorlatende laag  $DA$ ; twee damwanden  $LB$  en  $CM$ . In de damwand is de mogelijkheid voor een gat  $Q$  in de vorm van een bron opgenomen.

Het fragment is een rechthoek met lengte  $L$  en dikte  $D$ . Er is rekening gehouden met een verspringing ten opzichte van aansluitende fragmenten via  $AK$  en  $ND$ .

Deze geometrie stelt echter heel wat meer voor dan alleen maar een tussenfragment. Dit wordt verwezenlijkt door de positie van de equipotentiaalvlakken  $KL$  en  $MN$  en van de bron  $Q$  te variëren. Aldus kunnen alle



*Figuur 4.1: universeel fragment*

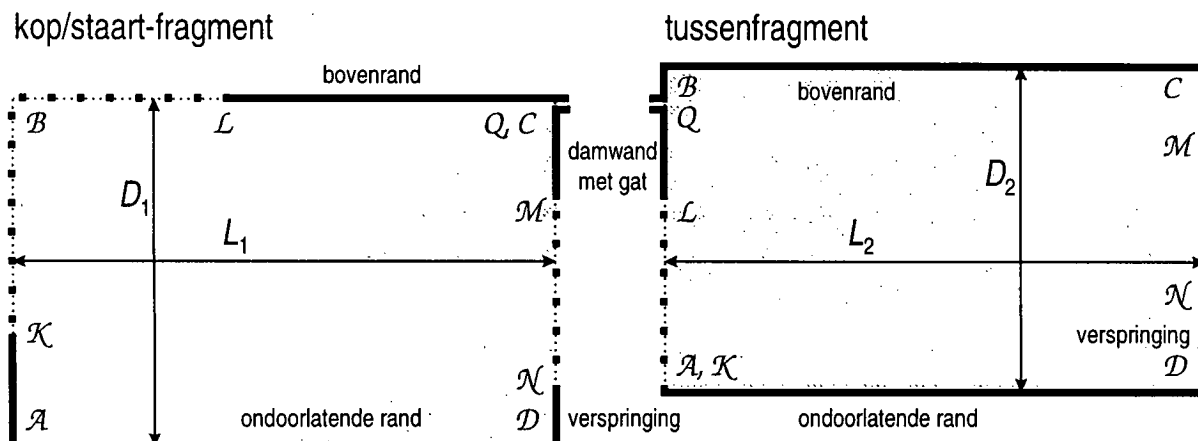
benodigde fragmenten gevormd of samengesteld worden. Dit geeft een optimale flexibiliteit. Elke gewenste geometrie wordt dan uniform met identieke uitdrukkingen beschreven.

De bestaande fragmenten zijn op de volgende wijze vervat in het universele fragment:

- Uiterwaardefragment  
Geen bron  $Q$ . Punt  $L$  valt samen met  $B$ ;  $M$  met  $C$ . Geen verspringen  $\mathcal{K}$  en  $\mathcal{N}$ . Dit is het enige fragment met lek en wijkt qua oplossing af van de overige fragmenten.
- Kop- of Staartfragment  
Geen bron  $Q$ . Punt  $L$  of  $M$  ligt op de bovenrand. Geen verspringen  $\mathcal{K}$  en  $\mathcal{N}$ . Het fragment is oneindig lang.
- Tussenfragment  
Geen bron  $Q$ . Geen verspringen  $\mathcal{K}$  en  $\mathcal{N}$ .
- Polderfragment  
Bron  $Q$  op de bovenrand. Punten  $M$  en  $\mathcal{N}$  vallen samen. Het fragment is oneindig lang.
- Sluisfragment  
Bron  $Q$  op de bovenrand. Punt  $M$  ligt op de bovenrand. Geen verspringen  $\mathcal{K}$  en  $\mathcal{N}$ . Het fragment is oneindig lang. Het huidige sluisfragment is nog een stukje doorgezet voorbij de damwand, maar dat komt nu te vervallen.

Voor het Opdrijffragment is nog geen beschrijving beschikbaar. De bestaande fragmenten kunnen zonder enig probleem gebruikt blijven worden. De numerieke code ervoor kan iets generieker gemaakt worden door de oneindig lange fragmenten eindig te maken en de mogelijkheid van een verspringing in te bouwen. In *Figuur 4.2* is dit aanschouwelijk gemaakt voor een kop/staart-fragment. Op  $\mathcal{BK}$  kan nu nog een Uiterwaardefragment worden aangesloten, mits punt  $L$  opschuift naar  $B$ . Het mag zelfs nog iets onder  $B$  liggen als er een inspringing aanwezig is.

De bedoeling van *Figuur 4.2* is om aan te geven hoe er omgegaan wordt met lek door de damwand.



*Figuur 4.2: aansluitend kop/staart- en tussenfragment met lek*

Hierbij maakt het niet uit of het om een gat gaat of het niet geheel ondoorlatend zijn van de damplanksloten. In beide gevallen is de lek uitgedrukt in drie potentialen: die op de linker rand van het linker fragment, die op de rechter rand van het rechter fragment en die op de onderlinge randen. Dit heeft tot gevolg dat de weerstand niet louter meer een factor is die per fragment bepaald kan worden. De integriteit van de fragmenten staat dus onder druk.

Deze impasse kan worden voorkomen door de lek te plaatsen binnen de fragmenten. Dit wordt verwezenlijkt door de randen van de fragmenten zo te kiezen dat één ervan de lekke damwand bevat en de andere zich ergens tussen twee damwanden bevindt. Door twee van deze fragmenten met de damwandkant tegen elkaar te plaatsen en op elkaar af te stemmen wordt een nieuw samengesteld fragment verkregen, waarin de lek geheel is opgenomen. Dit principe is aangegeven in *Figuur 4.2*.

Op de rechterrands van het Tussenfragment mogen twee inspringingen zitten, één boven en één beneden. Er mag ook een niet-lekke en goed aansluitende damwand aanwezig zijn. Het Kop/Staartfragment is nu in wezen ook een tussenfragment, omdat punt  $L$  even zo goed op  $KB$  mag liggen, evenals punt  $M$  ook op  $BC$  mag liggen. In het algemeen zit een slechte aansluiting van de damwand tegen de laagst gesitueerde bovenrand aan.

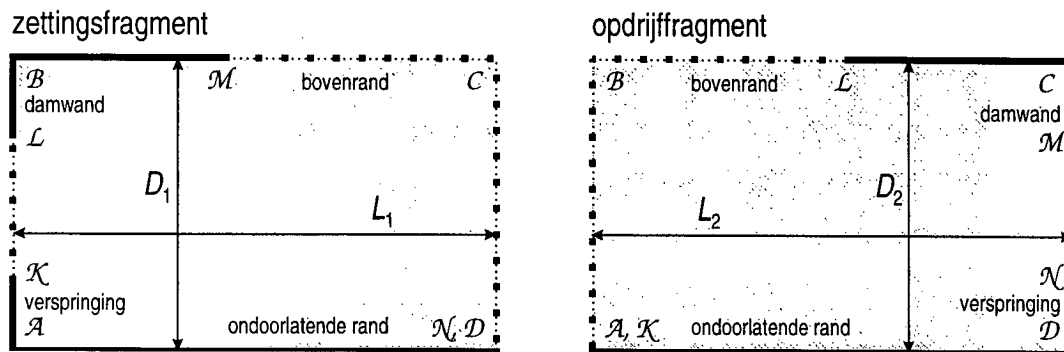
Voor dit samengestelde fragment moet nu de weerstand bepaald worden. Dit wordt verwezenlijkt door de oplossingen voor beide apart te bepalen. Vervolgens wordt het debiet door de onderlinge rand gelijk gesteld, evenals de potentiaal en het debiet in het gat. Hierdoor wordt het gatdebiet uitgedrukt in het totale debiet dat door de fragmenten stroomt.

In het geval van een lekkende damwand is de aanpak in principe eender, indien de lek opgevat wordt als een hele serie kleine gaatjes. Het vervelende is dat dit leidt tot een integraalvergelijking, die de lekdebietjes vastlegt. Dit is gecompliceerd en enige vereenvoudiging is op zijn plaats. Er wordt daarom aangenomen dat de lek het stromingspatroon niet al te zeer ontregelt. Dan mag er een oplossing gebruikt worden zonder lek om de potentiaal op de damwand vast te leggen. De lek door de damwand is evenredig met het potentiaalverschil erover. Deze lek wordt opgeteld bij het totale debiet. Hierdoor neemt de weerstand iets af, omdat het debiet toeneemt.

Het insluiten van de lek door het samenstellen van twee fragmenten is een goede methode om een zinvol gebruik te blijven maken van het principe van fragmentering. Dit geldt ook voor het nog niet behandelde zettingsfragment en opdrijffragment. Bij deze beide is onder de bovenrand een spleet aanwezig, waarin de waterdruk min of meer constant is. Aan de bovenstroomse zijde stroomt er water naartoe en aan de benedenstroomse zijde vloeit er water vanaf.

Het in ene modelleren van dit type fragmenten leidt tot een te moeilijke mathematische formulering. Er is al opgemerkt dat het universele type leidt tot een scala van elliptische functies. Deze zijn niet alledaags, maar er is een groot aantal rekenregels aanwezig om krachtige berekeningen mee te maken. Zettingsfragment en opdrijffragment zijn in hun geheel beschreven door hyper-elliptische functies. Dit is een mooie naam voor verbanden, die nergens adequaat beschreven staan.

Daarom nemen we weer onze toevlucht tot het samenstellen van twee eenvoudiger type fragmenten. In *Figuur 4.3* is het principe geschetst. Omdat er water naar en van de spleet in de bovenrand stroomt,



Figuur 4.3: samengesteld zettings- of opdrijffragment

zit er op de bovenrand ook een stagnatiepunt. Van hieruit loopt een min of meer verticale tak van de potentiaallijn. Precies daar wordt een rand van het fragment gekozen en samengesteld met eenzelfde gespiegeld type. Voor de afzonderlijke fragmenten gelden nu eenvoudiger elliptische oplossingen en samengesteld doen ze wat er in werkelijkheid gebeurt.

De plaats van het stagnatiepunt is bepaald door de voorwaarde van continuïteit van debiet. Bij het zettingsfragment ligt ook de druk in de spleet nog niet vast. Er zijn dan ook twee continuïteitsvoorwaarden: het debiet door de verticale aansluiting en dat van en naar de spleet. De berekening hiervan speelt zich geheel af binnen het samengestelde fragment. Bij het opdrijffragment is de druk in de spleet wel vooraf bekend. Er geldt slechts één continuïteitsvoorwaarde en wel voor het debiet door de verticale aansluiting. Omdat er bij de spleet water verloren kan gaan zullen in de uitwerking alle toegepaste fragmenten verwerkt moeten worden.

Het universele fragment blijkt geschikt om alle gewenste geometrieën in een stromingspatroon te kunnen simuleren. Het zal nu verder worden uitgewerkt om toegepast te kunnen worden in de probabilistische analyse.

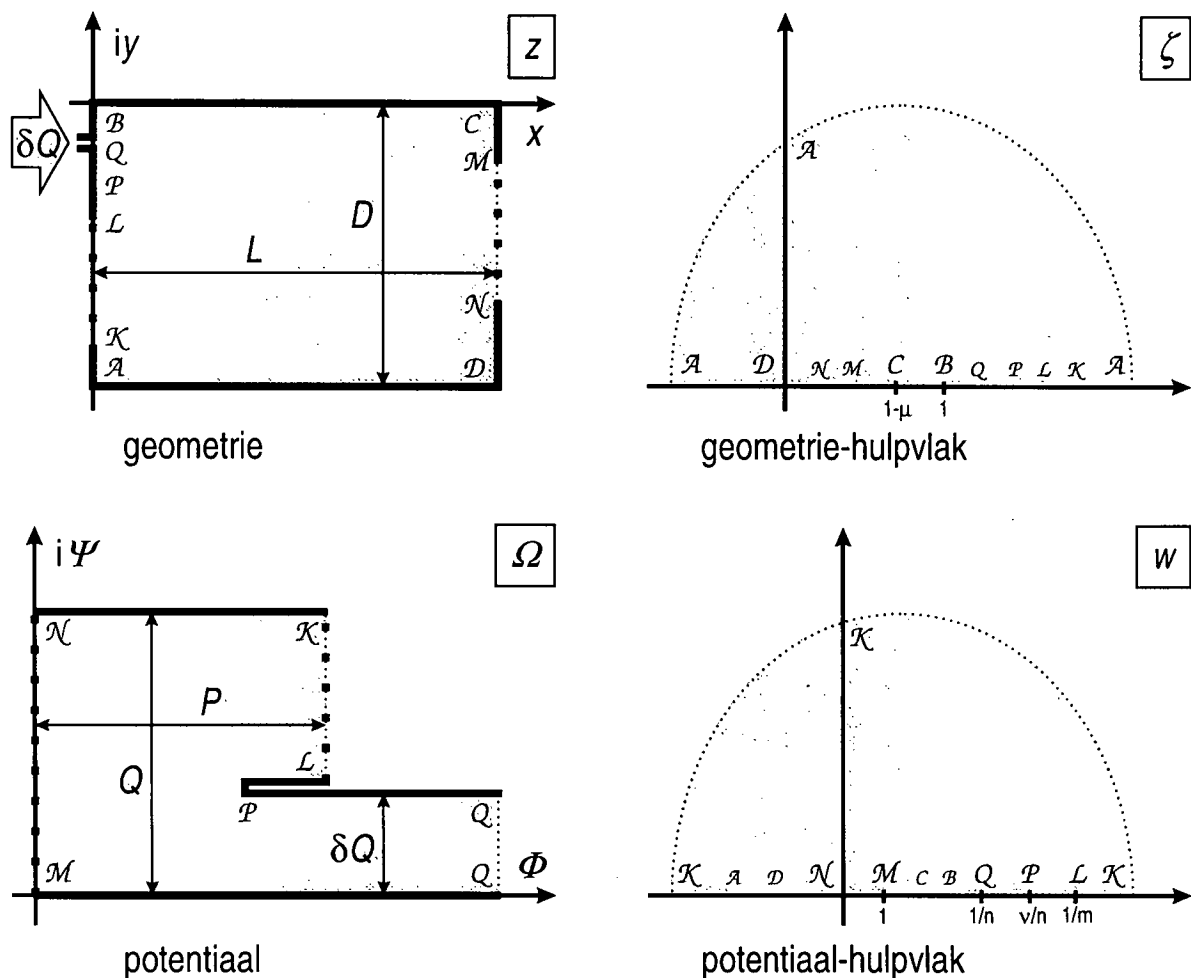
## 5 Uitwerking universeel fragment

De geometrie onder dijken en kunstwerken is in het voorgaande zodanig opgedeeld, dat de gehele stroming opgebouwd kan worden met behulp van slechts één type subfragment. Een fragment is een stukje van een watervoerend pakket, waardoorheen een vast debiet vloeit. Op de beide verticale fronten heerst een nog te bepalen potentiaal. Als zodanig is het subfragment als gewoon fragment in te zetten. Alleen als er additionele lek is in de vorm van lekkende damwanden, moeten de subfragmenten eerst rond zo'n damwand worden samengesteld om de extra lek in te sluiten.

In dit hoofdstuk zal de mathematische beschrijving van het subfragment gegeven worden. In *Figuur 5.1* is de geometrie met bijbehorende potentiaal aangegeven in de vorm van een complex vlak:

$$z = x + iy \quad \Omega = \Phi + i\Psi \quad (5.1)$$

Het geometrievlak  $z$  heeft coördinaten  $x, y$ ; het potentiaalvlak  $\Omega$  bestaat uit de potentiaal  $\Phi$  en de stroomfunctie  $\Psi$ . De geometrie is een vierkant met lengte  $L$  en dikte  $D$ . De hoekpunten



*Figuur 5.1: diverse complexe vlakken*

$ABCD$  liggen vast. De bodem  $\mathcal{DA}$  is ondoorlatend. Deze mag iets verdiept liggen ten opzichte van de aangrenzende fragmenten. Dit is aangegeven met  $\mathcal{AK}$  en  $\mathcal{ND}$ . De damwand bevindt zich op  $LB$ . De bron  $Q$  mag overal liggen op  $LM$ . Deze kan lek in de damwand voorstellen, maar ook stroming naar een erosiekanaal bij onderloopsheid. Punt  $M$  mag zowel op  $BC$  als op  $CD$  liggen. In het eerste geval sluit de sluisvloer niet goed aan; in het tweede geval is er een damwand of sprong in de sluisvloer.

Het bijbehorende potentiaalvlak volgt de stroom en potentiaallijnen van de geometrie en bevat de invloed van de bron. Er is slechts één bron beschouwd, maar er mogen er meer zijn. Het is voldoende de afleiding uit te voeren voor een enkele bron en later de oplossing uit te breiden via het principe van superpositie. Er is een extra punt  $P$  geïntroduceerd. Dit is een stagnatiepunt, waar de stromingen vanonder de damwand en vanuit de bron elkaar ontmoeten en samen verder gaan.

De taak waarvoor we gesteld zijn is het vinden van een verband tussen het potentiaalvlak en het geometrievlak. Dit komt neer op het vinden van de juiste afbeelding tussen beide vlakken. Dit kan het best worden aangepakt via twee hulpvlakken. Eerst wordt het geometrievlak afgebeeld op het geometrie-hulpvlak; vervolgens de potentiaal op het potentiaal-hulpvlak. De relatie tussen de hulpvlakken leidt dan tot het gewenste verband.

De afbeelding van het geometrievlak op het geometrie-hulpvlak is een standaardgeval. Een rechthoek gaat over in een halfvlak door middel van een Elliptische Functie. Een uitstekende samenvatting van de eigenschappen van deze functies is opgenomen in [Abramowitz, Stegun 1968], zie hoofdstukken 16 en 17. De afbeelding luidt:

$$\zeta = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{z}{L} \operatorname{K}(\mu) \middle| \mu \right\} \quad \frac{D}{L} = \frac{\operatorname{K}(1-\mu)}{\operatorname{K}(\mu)} \quad (5.2)$$

Via de slankheid van het fragment is de elliptische parameter  $\mu$  vastgelegd;  $\operatorname{K}$  is een volledige elliptische integraal van de eerste soort;  $\operatorname{dn}$  is een Jacobijnse elliptische functie, die ook wel 'delta functie' wordt genoemd.

De afbeelding van het potentiaalvlak op het potentiaal-hulpvlak is geen standaardgeval. Wel wordt hierin door het rechthoekgedeelte een elliptisch karakter herkend, maar hoe dit precies in elkaar zit is op voorhand nog niet te zeggen. Elke grootte die begrensd wordt door rechte lijnen kan echter op een halfvlak worden afgebeeld via een Schwarz-Christoffel-transformatie. Voor het potentiaalvlak is dan ook te schrijven:

$$\Omega = S \int \frac{u - \frac{\nu}{n}}{u - \frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{u-1}} \frac{1}{\sqrt{u - \frac{1}{m}}} \frac{du}{\sqrt{u}} + T \quad (5.3)$$

Er wordt dus in het hulpvlak geïntegreerd over een product van machten, waarbij de hoeken in het potentiaalvlak overeenkomen met de macht. Een schalingsfactor  $S$  en translatie  $T$  zijn toegevoegd. Voor de integratievariabele is een  $u$  geschreven.

In (5.3) zitten drie onbekenden: de vergrotingsfactor, de verschuivingsterm en de positie van het stagnatiepunt. Er zijn ook drie voorwaarden: de positie van de oorsprong, de potentiaalval en het

brondebiet. De onbekenden kunnen dus bepaald worden. Zodra dit gedaan is volgt als extra de waarde voor het totale debiet, dat door het fragment stroomt.

De verschuivingsterm is 0 als voor de ondergrens van de integraal 1 gekozen wordt, zoals blijkt uit de posities van punt  $\mathcal{N}$  in de potentiaalvlakken van *Figuur 5.1*. Daarnaast is de voorwaarde van de bronterm eenvoudig in te bouwen. Het passeren van punt  $Q$  in het hulpvlak zorgt een sprong in het potentiaalvlak ter grootte van het uittreedebiet  $i\delta Q$ , zoals aangegeven in *Figuur 5.1*. Deze sprong wordt via (5.3) gekwantificeerd door een infinitesimaal klein gebiedje  $\delta$  rond punt  $Q$  te beschouwen. Er geldt:

$$i\delta Q = S \int_{\frac{1}{n}-\delta}^{\frac{1}{n}+\delta} \frac{u-\frac{\nu}{n}}{u-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{u-1}} \frac{1}{\sqrt{u-\frac{1}{m}}} \frac{1}{\sqrt{u}} du \quad (5.4)$$

Omdat  $\delta$  zo klein is mag onder de integraal overal voor  $u$  de waarde  $1/n$  ingevuld worden, behalve in de noemer van de eerste term. Deze noemer wordt uitgeïntegreerd tot een logaritme:

$$i\delta Q = S \frac{\frac{1}{n}-\frac{\nu}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}-1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \ln\left(u-\frac{1}{n}\right) \Big|_{\frac{1}{n}-\delta}^{\frac{1}{n}+\delta} \quad (5.5)$$

Invulling van boven- en ondergrens in de logaritme levert de sprong  $\ln\{\delta/(-\delta)\} = -\pi i$  op. Hiermee is de waarde van  $S$  bepaald. Deze wordt ingevuld in (5.3), terwijl  $T$  vervangen wordt door de ondergrens 0 in de integraal:

$$\pi \frac{\Omega}{\delta Q} = \int_1^w \frac{u-\frac{\nu}{n}}{u-\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}-1}}{\sqrt{u-1}} \frac{\sqrt{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{m}-u}} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu}{n}-\frac{1}{n}}} du \quad (5.6)$$

Let erop dat de middelste wortel zodanig is geschreven dat de teller erin reëel is. OP  $LPQM$  is de gehele uitdrukking aldus reëel.

Het behaalde resultaat wordt herschikt. De eerste breuk wordt uitgesplitst; de parameters  $m$  en  $n$  worden omgewerkt uit hun breukvorm. Constante termen worden buiten de integraal geschreven. De integratie-variabele wordt in de vorm van een wortel geschreven:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{\delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}} (n-m) \int_1^w \left\{ \frac{1}{\nu-1} + \frac{1}{1-nu} \right\} \frac{1}{\sqrt{u-1}} \frac{1}{\sqrt{1-mu}} d\sqrt{u} \quad (5.7)$$

Deze vorm verraadt al zijn elliptisch karakter. Elliptische functies zijn goed gedocumenteerde en getabelleerde functies voor een bepaald gebied van waarden. Het vereist enige precisie om deze gebieden naar voren te halen. Dit wordt uitgevoerd in bijlage A, Uitwerking van het potentiaalvlak. De daar behaalde resultaten worden overgenomen.

De afbeelding van het potentiaalvlak op het potentiaalhelpvlak, (5.7), is volledig uitgewerkt in [A.19]. Deze uitdrukking is toegesneden op het lijnstuk  $LPQM$ , omdat de elliptische functies voor de waarden daar getabelleerd zijn. Echter, [A.19] is algemeen in het gehele veld geldig. De uitdrukking wordt gekopieerd:

$$\frac{\Omega - P}{\delta Q} + \frac{Q}{\delta Q} \frac{F(\vartheta | 1-m)}{K(m)} = i + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-n}{w-1} \frac{1-mw}{n-m} \frac{1}{nw}} \quad \sin \vartheta = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\Theta[F(\vartheta | 1-m) + F(\varepsilon | 1-m) | 1-m]}{\Theta[F(\vartheta | 1-m) - F(\varepsilon | 1-m) | 1-m]} \right\} + \frac{F(\varepsilon | 1-m) F(\vartheta | 1-m)}{K(1-m) K(m)} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}} \quad (5.8)$$

De hulpgrootheid  $\vartheta$  is overgenomen uit [A.2]. Het totale debiet door het fragment is gespecificeerd in [A.20] en luidt:

$$\frac{Q}{\delta Q} \frac{K(1-m)}{K(m)} - \frac{P}{\delta Q} = \frac{F(\varepsilon | 1-m)}{K(m)} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}} \quad (5.9)$$

De symbolenlijst vermeldt de namen van de diverse elliptische integralen. Het rechter deel van de beide relaties betreft de bijdrage van de bron. De termen met  $\delta Q$  in de noemer betreffen de reguliere stroming; de overige vertegenwoordigen de invloed van de bron.

De oplossing mag door superpositie uitgebreid worden tot een belegging van bronnen. Mits de bronnen gelegen zijn op  $\mathcal{LM}$ , mag het rechterdeel van (5.8) en (5.9) dan net zo vaak herhaald worden, als er bronnen zijn. De waarde van  $n$  moet hierbij gevarieerd worden, afhankelijk van de positie. Aldus kan bijvoorbeeld een erosiekanaal gesimuleerd worden.

Op dit moment is het verband bekend tussen de potentiaal en het potentiaal-hulpvlak, (5.8), en tussen de geometrie en het geometrie-hulpvlak, (5.2). Om direct het verband tussen potentiaal en geometrie te kennen moeten  $\zeta$  en  $w$  nog op elkaar worden afgebeeld. Beide zijn een halfvlak, zodat dit door inversie, schaling en translatie verwezenlijkt kunnen worden. Uit *Figuur 5.1* is af te lezen dat:

$$w = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta - \zeta_N}{\zeta - \zeta_K} \quad (5.10)$$

De waarden voor de punten  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{N}$  volgen uit de positie van deze punten in het geometrievlak via (5.2). De waarde van  $m$  is bepaald door het invullen van de positie van punt  $\mathcal{L}$ ; de waarde van  $n$  door het invullen van de positie van punt  $\mathcal{Q}$ .

Als er bij punt  $\mathcal{K}$  geen inspringing zit neigt de waarde van  $\zeta_K$  naar oneindig en valt samen met  $\zeta_A$ . Dit maakt het verband tussen de hulpvlakken lineair. Dit zal vaak voorkomen, omdat een inspringing niet noodzakelijkerwijs hoeft samen te vallen met de aanwezigheid van een damwand. Grote voordelen voor de berekening biedt dit echter niet.

Alle benodigde stromingssituaties onder dijken en kunstwerken zijn terug te brengen tot de oplossing van het universele fragment (5.2), (5.8), (5.9) en (5.10). Deze is dan ook de basis voor het verdere onderzoek.



## 6 Huidige fragmenten

In het vorige hoofdstuk is het verband tussen de potentiaal en de geometrie opgezet in algemene bewoordingen. Er kunnen vrij gecompliceerde geometrieën mee beschreven worden. Maar ook eenvoudige. Alle tot nu toe beschreven fragmenten zitten erin. Deze zijn kop- en staartfragment en tussenfragment en het piping-eind-fragment. Alleen bij het laatste fragment speelt de bron een rol. Bij de overigen zit deze er niet in.

Het ontbreken van de bron maakt de beschrijving een stuk eenvoudiger. Stellen we in (5.8) en (5.9)  $\delta Q$  gelijk aan 0, dan wordt een oplossing verkregen, die genoteerd wordt in inverse vorm:

$$\operatorname{sn}\left\{\frac{-\Omega + P}{Q} K(m) | 1-m\right\} = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \quad \frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad (6.1)$$

Dit kan nog ietwat herschreven worden, terwijl de geometrie (5.2) en het verband tussen het het potentiaal-hulpvlak en het het geometrie-hulpvlak, (5.10), worden herhaald.

$$mw = \operatorname{dn}^2\left\{\frac{-\Omega + P}{Q} K(m) | 1-m\right\} \quad \frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad (6.2)$$

$$\zeta = \operatorname{dn}^2\left\{\frac{z}{L} K(\mu) | \mu\right\} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad w = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta - \zeta_N}{\zeta - \zeta_K}$$

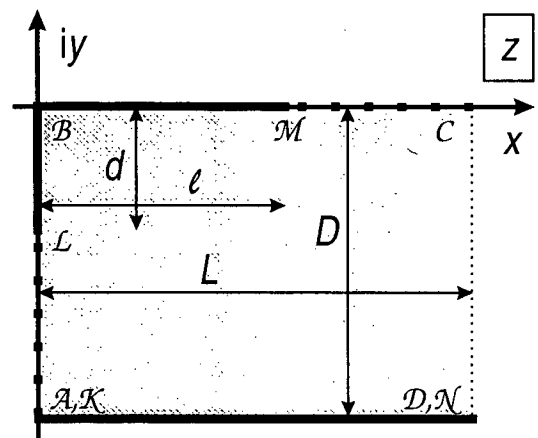
We zullen nu achtereenvolgens laten zien dat deze oplossing de tot nog toe gebruikte fragmenten bevat.

### - I Kop- en Staartfragment

Kop- en staartfragment hebben een identieke beschrijving. Alleen de geometrie is gespiegeld. In [Sellmeijer 1995] is het gedrag van een dergelijk fragment uitgebreid bestudeerd. In *Figuur 6.1* is de geometrie ervan aangegeven. Er is geen onderscheid tussen de punter  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{K}$  en de punter  $\mathcal{D}$  en  $\mathcal{N}$ . De ondoorlatende laag verspringt daar dus niet. Verder is de geometrie geen rechthoek, maar een halve strip. Dit betekent dat  $L$  oneindig groot is.

Een strip is slechts een bijzonder geval van een rechthoek. In [Abramowitz, Stegun 1968], 16.15 staat hoe Jacobijnse elliptische functies zich in zo'n geval gedragen: als hyperbolische functies. In dit geval is 16.15.3 aan de orde. Uit de verhouding  $D/L$  in (6.2) blijkt dat de waarde van  $\mu$  gelijk wordt aan 1.

Omdat  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{K}$  samenvallen, gaat  $\zeta_K$  naar oneindig



*Figuur 6.1: staartdeel*

en omdat  $\mathcal{D}$  en  $\mathcal{N}$  samenvallen wordt  $\zeta_N$  gelijk aan 0. Dit kan worden nagegaan in *Figuur 5.1*. De relatie (6.2) krijgt de volgende vorm:

$$mw = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{-\Omega + P}{Q} K(m) | 1-m \right\} \quad \frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad (6.3)$$

$$\zeta = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\pi z}{2D} \right) \quad w = \frac{\zeta}{\zeta_M}$$

Realiseren we ons nu dat  $w$  gelijk is aan  $1/m$  voor  $z$  gelijk aan  $-id$  en dat  $w$  gelijk is aan 1 voor  $z$  gelijk aan  $\ell$ , dan wordt het uiteindelijke resultaat:

$$\frac{\cosh\left(\frac{\pi d}{2D}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi z}{2D}\right)} = \operatorname{dn} \left\{ \frac{-\Omega + P}{Q} K(m) | 1-m \right\} \quad \frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad m = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi d}{2D}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi \ell}{2D}\right)} \quad (6.4)$$

Aldus is hetzelfde resultaat bereikt als in [Sellmeijer 1995]. Let erop dat hier de damwandlengte gespecificeerd is en niet de vrije ruimte onder de damwand. Daarom zit in de parameter een cosinus in plaats van een sinus:  $\sin\{\pi/2 (D-d)/D\} = \cos\{\pi/2 d/D\}$ . Voorts zijn de assen van de respectievelijke geometrievlakken en potentiaalvlakken niet op dezelfde plaats gekozen. Dit leidt tot een andere, maar wel identieke notatie van het algemene verband. Realiseer hierbij dat via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8.6 en 16.20.1 geldt dat  $\operatorname{nd}\{-u-iK(m)|1-m\} = \operatorname{sn}(iulm)$ .

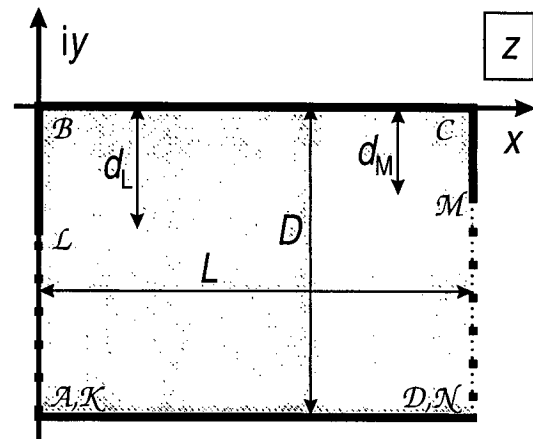
## - II Tussenfragment

Het tussenfragment bestaat uit een rechthoek met op de verticale zijden een damwand. In *Figuur 6.2* is dit geschetst. Ook hier verspringt de ondoorlatende laag niet. De punten  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{K}$  en de punten  $\mathcal{D}$  en  $\mathcal{N}$  vallen samen. Dit betekent dat  $\zeta_K$  weer naar oneidig gaat en  $\zeta_N$  gelijk is aan 0.

Het verband tussen de hulpvlakken is alleen maar een schaalfactor, zoals blijkt uit de laatste relatie van (6.2). De hulpvlakken worden eerst geëlimineerd, zodat een direct verband tussen potentiaal en geometrie wordt verkregen:

$$\operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{P - \Omega}{Q} K(m) | 1-m \right\} = \frac{m}{\zeta_M} \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{z}{L} K(\mu) | \mu \right\} \quad \frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad (6.5)$$

Hierin moeten nog twee voorwaarden verwerkt worden: de positie van punten  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{M}$ . Dan liggen de waarden van  $\zeta_M$  en  $m$  vast. Eerst wordt echter een aangepaste schrijfwijze volgens [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8.6 en 16.20.1 en 3 verwerkt. Er geldt:  $\operatorname{dn}\{K(1-m)-iK(m)-u|1-m\} = \sqrt{m} \operatorname{sn}(iulm)$ . Het verband (6.5) laat zich dan schrijven als:



*Figuur 6.2: tussenfragment*

$$\operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{i\Omega + Q}{Q} K(m) \mid m \right\} = \frac{1-\mu}{\zeta_M} \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D+iL-iz}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} \quad (6.6)$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)}$$

Nu komen de voorwaarden. In  $z = -id_L$  geldt  $\Omega = P$  en in  $z = L-id_M$  geldt  $\Omega = 0$ . Hierbij is nog één relatie nodig:  $\operatorname{sn}\{u+iK(1-\mu) \mid 1-\mu\} = 1/\sqrt{1-\mu} \operatorname{ns}(u \mid 1-\mu)$  uit [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8.6. De parameter  $\zeta_M$  wordt geëlimineerd en een uitdrukking voor  $m$  wordt toegevoegd:

$$\operatorname{sn} \left\{ \frac{i\Omega + Q}{Q} K(m) \mid m \right\} = \frac{\operatorname{sn} \left\{ \frac{D+iL-iz}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\}}{\operatorname{sn} \left\{ \frac{D-d_M}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\}} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad (6.7)$$

$$\sqrt{\frac{m}{1-m}} = \operatorname{sn} \left\{ \frac{D-d_L}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} \operatorname{sn} \left\{ \frac{D-d_M}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} \quad \frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)}$$

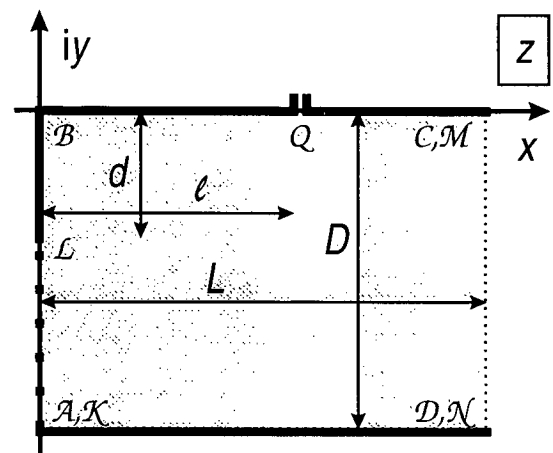
Vergeet hierbij de speciale waarden in tabel 16.5 niet. Dit is precies het resultaat zoals dat bereikt is in [Sellmeijer 1995].

### - III Pipingfragment

Het pipingfragment is uitgebreid beschreven in [Sellmeijer 1996]. Er zijn twee smaken: polderfragment en sluisfragment. De eerste gaat ervan uit dat de polderzijde is afgesloten met een ondoorlatende kleilaag; de tweede kan vrij afwateren naar een kanaalbodem. Om redenen van eenvoud is voor het sluisfragment gekozen voor een alternatieve aanpak. Deze komt niet overeen met de huidige opzet. Het polderfragment past er echter wel in en zou dus overeen moeten komen met het bereikte resultaat. Het is geschetst in *Figuur 6.3*.

Omdat de lengte  $L$  oneindig lang genomen zal worden, komen de punten  $C$ ,  $M$ ,  $D$  en  $\mathcal{N}$  dicht bij elkaar te liggen. Uit het potentiaal-hulpvlak van *Figuur 5.1* lezen we af, dat deze figuur alleen iets kan blijven voorstellen als  $m$  naar nul gaat. In plaats van met  $w$  zal er gewerkt moeten worden met  $mw$ . In dit aangepaste hulpvlak vallen voor  $m = 0$  de punten  $C$ ,  $M$ ,  $D$  en  $\mathcal{N}$  samen, terwijl de overige punten iets blijven voorstellen.

We grijpen terug op (5.8) en (5.9) om te zien wat de consequenties zijn van kleine waarden voor  $m$  en ook  $n$ .  $K(1-m)$  neigt dan naar oneindig. Dit betekent dat het totale debiet naar nul gaat. Dit ligt tamelijk voor de hand, omdat de rand is afgesloten. De potentiaal  $P$  mag nu niet meer vrij gekozen



*Figuur 6.3: pipingfragment*

worden. Deze stelt nu de waarde voor op  $\mathcal{NM}$ , die zich vanzelf instelt. In (5.8) wordt  $Q$  op nul gezet en  $K(1-m)$  oneindig gesteld:

$$\frac{\Omega - P}{\delta Q} = i + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-n}{w-1} \frac{1-mw}{n-m} \frac{1}{nw}} + \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\Theta[F(\vartheta|1-m) + F(\varepsilon|1-m)|1-m]}{\Theta[F(\vartheta|1-m) - F(\varepsilon|1-m)|1-m]} \right\} \quad (6.8)$$

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}}$$

Deze uitdrukking wordt nu net zolang gemasseerd, totdat overal de invloed van  $m = 0$  merkbaar is. Er is bijvoorbeeld geen verschil tussen  $w$  en  $w-1$ . Immers,  $mw-m \rightarrow mw$ . Dit maakt aanpassingen onder de  $\operatorname{arctanh}$  mogelijk. De thêtafunctie wordt aangepakt met [Abramowitz, Stegun 1968], 17.4.34 en 17.4.37:

$$\lim_{m \uparrow 1} \ln \{\Theta(um)\} = \int_{m \uparrow 1} \lim_{m \uparrow 1} Z(um) du = \int \tanh u du = \ln \{\cosh u\} \quad (6.9)$$

Aldus wordt de notatie van (6.8) aangepast:

$$\frac{\Omega - P}{\delta Q} = i + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left( \frac{m/n}{mw} \sqrt{\frac{1-mw}{1-m/n}} \right) + \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\cosh[F(\vartheta|1-m) + F(\varepsilon|1-m)]}{\cosh[F(\vartheta|1-m) - F(\varepsilon|1-m)]} \right\} \quad (6.10)$$

$$\sin \vartheta = \sqrt{1-mw} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{1-m/n}$$

In [Abramowitz, Stegun 1968], 4.5.25 staat de expressie voor optelling van argumenten in een hyperbolische functie en in 4.6.22 wordt een logaritme uitgedrukt in een  $\operatorname{arctanh}$ :

$$\frac{\Omega - P}{\delta Q} = i + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left( \frac{m/n}{mw} \sqrt{\frac{1-mw}{1-m/n}} \right) + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left\{ \tanh[F(\vartheta|1-m)] \tanh[F(\varepsilon|1-m)] \right\} \quad (6.11)$$

$$\sin \vartheta = \sqrt{1-mw} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{1-m/n}$$

Tenslotte elimineren [Abramowitz, Stegun 1968], 16.15.1 en 16.1.5 de laatste overblijfselen van de nul wordende parameter.  $\vartheta$  en  $\varepsilon$  worden geheel vervangen:

$$\frac{\Omega - P}{\delta Q} = i + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left( \frac{m/n}{mw} \sqrt{\frac{1-mw}{1-m/n}} \right) + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \left\{ \sqrt{1-mw} \sqrt{1-m/n} \right\} \quad (6.12)$$

De thêtafunctie blijkt dus gedegeneerd te zijn tot een strip. Dit wordt bevestigd door het middelste vlak van Fig. A.2. Dit is dezelfde strip mits de punten  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{N}$  samenvallen. Het resultaat kan nog compact geschreven worden door [Abramowitz, Stegun 1968], 4.6.28 toe te passen:

$$\frac{\Omega - P - i\delta Q}{\delta Q} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-mw}{1-m/n}} \quad (6.13)$$

Duidelijk is de bron zichtbaar, als  $w$  gelijk wordt aan  $1/n$ . Natuurlijk staat er nog een  $P$  in de formule, maar die is er om de referentie te verschuiven naar  $\mathcal{KL}$ .

Nu de stofwolken zijn opgetrokken, kunnen we iets gedetailleerder nadenken over de parameter  $m$ . Deze gaat naar nul en dit is terecht in (6.13) verwerkt voor zover mogelijk. We zullen nu echter een fatsoenlijke waarde voor  $mw$  moeten vinden. Daarom grijpen we terug op de relatie tussen de beide hulpvlakken (5.10) en de definitie van de geometrie (5.2). De punter  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{K}$  en de punter  $\mathcal{D}$  en  $\mathcal{N}$  vallen samen. Dit betekent dat  $\zeta_{\mathcal{K}}$  weer naar oneindig gaat en  $\zeta_{\mathcal{N}}$  gelijk is aan 0. Dit levert op:

$$w = \frac{\zeta}{\zeta_{\mathcal{M}}} \quad \zeta = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{z}{L} \operatorname{K}(\mu) \middle| \mu \right\} \quad \frac{D}{L} = \frac{\operatorname{K}(1-\mu)}{\operatorname{K}(\mu)} \quad (6.14)$$

Nu gaat de lengte van het fragment naar oneindig. Dit betekent dat de waarde van  $\mu$  naar 1 gaat. De waarde van  $\zeta_{\mathcal{M}}$  gaat dus naar 0 omdat  $\zeta_{\mathcal{M}} = \operatorname{dn}^2 \{ \operatorname{K}(\mu) \middle| \mu \} = 1 - \mu$ . Door nu de positie van punt  $L$  te beschouwen komt alles automatisch op zijn plaats:  $1/m = \zeta_{\mathcal{L}} / \zeta_{\mathcal{M}}$ . Voorts passen we [Abramowitz, Stegun 1968], 16.15.3 toe:

$$mw = \frac{\zeta}{\zeta_{\mathcal{L}}} \quad \zeta = \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\pi z}{2D} \right) \quad (6.15)$$

Invulling van de posities van de punten  $L$  en  $Q$  leidt dan tot:

$$mw = \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi d}{2D} \right)}{\cosh^2 \left( \frac{\pi z}{2D} \right)} \quad \frac{m}{n} = \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi d}{2D} \right)}{\cosh^2 \left( \frac{\pi l}{2D} \right)} \quad (6.16)$$

Dit is precies de ontbrekende informatie. In de wetenschap dat zowel  $m$  als  $n$  naar 0 neigen kan (6.13) tenslotte geschreven worden als:

$$\frac{\pi \Omega - P - i\delta Q}{2 \delta Q} = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi d}{2D} \right)}{\cosh^2 \left( \frac{\pi z}{2D} \right)}}{1 - \frac{\cos^2 \left( \frac{\pi d}{2D} \right)}{\cosh^2 \left( \frac{\pi l}{2D} \right)}}} = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\tanh^2 \left( \frac{\pi z}{2D} \right) + \tan^2 \left( \frac{\pi d}{2D} \right)}{\tanh^2 \left( \frac{\pi l}{2D} \right) + \tan^2 \left( \frac{\pi d}{2D} \right)}} \quad (6.17)$$

Let erop dat bij piping het debiet de andere kant op gaat. Het resultaat komt precies overeen met [Sellmeijer 1996].



## 7 Gat- en Lekfragment

Een damwand hoeft niet altijd goed aan te sluiten aan de onderrand van de waterkerende constructie. Er kan sprake zijn van een spleet, waardoor water weglekt naar een volgend fragment. Daarnaast hoeft de damwand niet volledig dicht te zijn. Een bentonietwand heeft een geringe doorlatendheid evenals de sloten van stalen damwanden. Deze extra lekken verkleinen de weerstand en moeten dus uit veiligheidsoverwegingen in de berekening worden meegenomen.

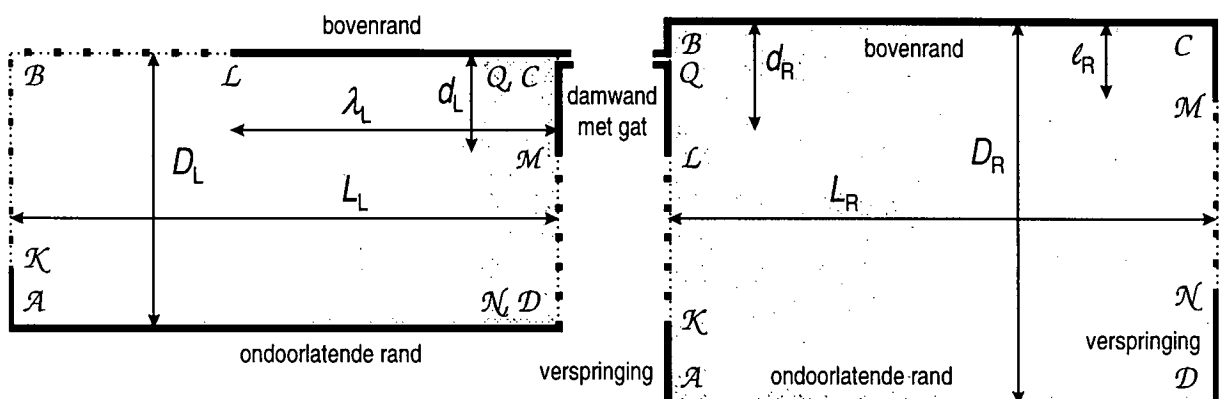
De modellering van beide soorten lek gaat op een identieke manier: simulatie door een bron. Eerst zal het gat worden aangepakt. Vervolgens wordt de damwandlek behandeld. Hierbij kunnen de relevante grootheden direct overgenomen worden van de gatafleiding.

### - I Lek door gat

In *Figuur 7.1* zijn twee op elkaar aansluitende fragmenten geschetst met een gat in de aansluitende damwand. Door de verspringing hoeft dit gat niet in elk fragment precies op de bovenhoek te zitten. Nu is het probleem dat de potentiaal in het gat en op de onderlinge rand niet gelijk hoeven te zijn. Er kan dus niet een voor het fragment karakteristieke weerstand gedefinieerd worden. De lek door het gat is afhankelijk van twee fragmenten. Dit geldt voor de gaten in alle damwanden. Dit betekent dat er een verstrengelde berekening voor alle fragmenten tegelijk gemaakt moet worden. Dit is nooit de opzet van de fragmentenmethode geweest.

Om toch tot een verzameling afzonderlijke fragmenten te komen wordt gebruik gemaakt van de mogelijkheid om ook randen tussen damwanden te definiëren. Aldus is er alleen een gat op de onderlinge rand van de twee fragmenten in *Figuur 7.1*. Door deze twee samen te stellen ontstaat er een nieuw fragment met integere weerstand.

Beide afzonderlijke fragmenten zijn van het universele type. Hiervoor is een oplossing gepresenteerd in hoofdstuk 5, Uitwerking universeel fragment. Deze oplossing wordt hier toegepast op beide



*Figuur 7.1: fragment met gat in damwand*

fragmenten. De weerstand is de verhouding tussen het potentiaalverschil op de zijvlakken en het totaal doorstroomde debiet.

Om de weerstand te kunnen specificeren moeten er nog twee onbekenden worden uitgewerkt. Deze zijn: de verhouding tussen de potentiaalvallen over de beide fragmenten en het debiet door het gat. De verhouding tussen de potentiaalvallen over de beide fragmenten volgt uit het feit dat het debiet door de onderlinge rand continu is. Het debiet door het gat is bepaald door het feit dat de potentiaal in het gat continu is.

De potentiaal in de buurt van de bron is beschreven door (5.8). Op de rand  $QM$  is het imaginaire deel nul. Volgens [Abramowitz, Stegun 1968], 4.6.7 wordt de  $\operatorname{arctanh}$  dan gelezen als een  $\operatorname{arccoth}$ . Het is verstandig een afkorting in te voeren. Er geldt:

$$\frac{\Phi - P}{\delta Q} + \frac{Q}{\delta Q} \frac{F(\vartheta | 1-m)}{K(m)} = G(w, n; m) \quad \sin \vartheta = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}}$$

$$G = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccoth} \sqrt{\frac{1-n}{w-1} \frac{1-mw}{n-m} \frac{1}{nw}} + \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\Theta[F(\vartheta | 1-m) + F(\varepsilon | 1-m) | 1-m]}{\Theta[F(\vartheta | 1-m) - F(\varepsilon | 1-m) | 1-m]} \right\} + \frac{F(\varepsilon | 1-m) F(\vartheta | 1-m)}{K(1-m) K(m)} \quad (7.1)$$

Met de bovenste vergelijking kunnen we nu aan het werk, terwijl de afkorting  $G$  gebruikt zal worden voor de numerieke codering. Nu zetten we de twee fragmenten naast elkaar. Het rechter fragment wordt aangegeven met de index  $R$  en wordt geplaatst als het is. Het linker fragment krijgt de index  $L$  en wordt gespiegeld. De beide debieten erin zijn gelijk aan die in het rechter fragment, maar hebben een tegengesteld teken. Op deze wijze kan formule (7.1) in beide fragmenten toegepast worden en is er aan continuïteit van debiet voldaan.

De bovenste vergelijking van (7.1) wordt nu op beide fragmenten toegepast;  $w$  krijgt een index  $G$  van gatrand:

$$\frac{\Phi_R - P_R}{\delta Q} = G(w_G, n; m)_R - \frac{Q}{\delta Q} \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_R}{K(m)_R} \quad (7.2)$$

$$\frac{\Phi_L - P_L}{\delta Q} = -G(w_G, n; m)_L + \frac{Q}{\delta Q} \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_L}{K(m)_L}$$

De beide linker delen stellen de potentiaal op de gatrand voor. De gatrand is een min of meer cirkelvormig oppervlak rond de bron. Daar beschouwen we een bepaalde stijghoogte, waardoor het debiet  $\delta Q$  wordt gegenereerd. Aan de andere kant doen we precies eender voor dezelfde gatgrootte. Omdat dan de druk continu moet zijn, wordt door gelijk stellen van de twee relaties in (7.2) een uitdrukking voor het gatdebiet verkregen:

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{1}{G(w_G, n; m)_L + G(w_G, n; m)_R} \left\{ \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_L}{K(m)_L} + \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_R}{K(m)_R} \right\} \quad (7.3)$$

Nu richten we onze aandacht op de weerstand. Deze is gepresenteerd in (5.9). Denk eraan dat de beide debieten van de twee fragmenten onderling gelijk zijn, maar tegengesteld van teken. Er geldt:



$$\frac{Q}{\delta Q} \frac{K(1-m)_R}{K(m)_R} - \frac{P_R}{\delta Q} = \frac{F(\varepsilon|1-m)_R}{K(m)_R} \quad \frac{Q}{\delta Q} \frac{K(1-m)_L}{K(m)_L} + \frac{P_L}{\delta Q} = \frac{F(\varepsilon|1-m)_L}{K(m)_L} \quad (7.4)$$

Hieruit volgt eenvoudig de weerstand door de uitdrukkingen bij elkaar op te tellen:

$$W = \frac{P_R - P_L}{Q} = \frac{K(1-m)_L}{K(m)_L} + \frac{K(1-m)_R}{K(m)_R} - \frac{\delta Q}{Q} \left\{ \frac{F(\varepsilon|1-m)_L}{K(m)_L} + \frac{F(\varepsilon|1-m)_R}{K(m)_R} \right\} \quad (7.5)$$

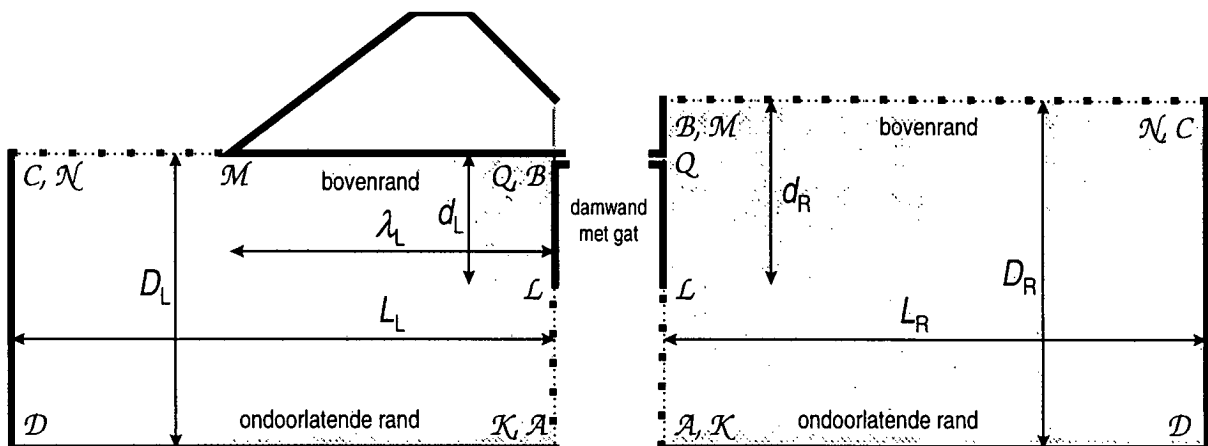
Samen met (7.3) ligt de weerstand nu vast. Enige voorzichtigheid in het gebruik van de formule is wel geboden. De aanpak geldt voor een relatief klein gat. Dan mag er best een klein cirkeltje rond het gat beschouwd worden, waarop de druk continu is met die op de andere zijde van het gat. Voor het ontbreken van hele stukken damwand gaat dit natuurlijk niet op. De correctie voor het gat moet klein zijn ten opzichte van de hoofdstroming.

In het behaalde resultaat zitten nog drie onbekenden: parameter, karakteristiek en gatrand. Deze zijn geheel door de geometrie bepaald. Ze volgen uit de relatie tussen geometrie en hulpvlak (5.2) en die tussen de beide hulpvlakken (5.10). Met behulp van *Figuur 5.1* gelden de volgende relaties:

$$\frac{1}{m} = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_L - \zeta_N}{\zeta_L - \zeta_K} \quad \frac{1}{n} = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_Q - \zeta_N}{\zeta_Q - \zeta_K} \quad w_G = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_G - \zeta_N}{\zeta_G - \zeta_K} \quad (7.6)$$

De karakteristieke punten in het geometriehulpvlak zijn in detail uitgewerkt in bijlage B,

Positionering karakteristieke punten. De daar bepaalde waarden moeten ingevuld worden in (7.6).



*Figuur 7.2: voorbeeld invloed van gat op de weerstand*

Aan de hand van een voorbeeld zal nu de invloed van een gat op de weerstand zichtbaar worden gemaakt. Dit voorbeeld is geschetst in *Figuur 7.2*. Gestreefd is naar een simpele, maar toch realistische geometrie. Deze is gevonden in één enkel samengesteld fragment, dat de volledige stroming onder een dijk bevat. De verticale stroomlijn helemaal links simuleert het midden van de rivier. Er is een vlakke ondoorlatende bodem. De verticale stroomlijn helemaal rechts simuleert het ophouden van de zandige goed doorlatende rivierafzettingen. Het binnenland ligt iets hoger dan de rivierbodem. Aan de polderzijde van de dijk is een kwelscherm aangebracht.

$\zeta$	linker subfragment	rechter subfragment
$\mathcal{K}$	$\infty$	$\infty$
$\mathcal{L}$	$ns^2 \left\{ \frac{D_L - d_L}{D_L} K(1 - \mu_L)   1 - \mu_L \right\}$	$ns^2 \left\{ \frac{D_L - d_L}{D_R} K(1 - \mu_R)   1 - \mu_R \right\}$
$\mathcal{M}$	$dn^2 \left\{ \frac{\lambda_L}{L} K(\mu_L)   \mu_L \right\}$	1
$\mathcal{N}$	$1 - \mu_L$	$1 - \mu_R$
$\mathcal{Q}$	$ns^2 \left\{ \frac{D_L - r}{D_L} K(1 - \mu_L)   1 - \mu_L \right\}$	$ns^2 \left\{ \frac{D_L - r}{D_R} K(1 - \mu_R)   1 - \mu_R \right\}$
$\mathcal{G}$	1	$ns^2 \left\{ \frac{D_L}{D_R} K(1 - \mu_R)   1 - \mu_R \right\}$

Tabel 7.1: hoekpunten voor eindige fragmenten

vermeld.

Omdat er geen sprong zit bij punt  $\mathcal{K}$ , kan  $d_R$  uitgedrukt worden in de overige afstanden. Dit is een prachtig uitgangspunt voor een al redelijk gedetailleerde berekening. Maar we gaan nog een stapje

verder, omdat we zo weinig mogelijk invoerparameters willen. In de traditie van kop- en staartfragmenten nemen we de lengte van elk onbepert groot. Beide waarden van  $\mu$  naderen dan tot 1.

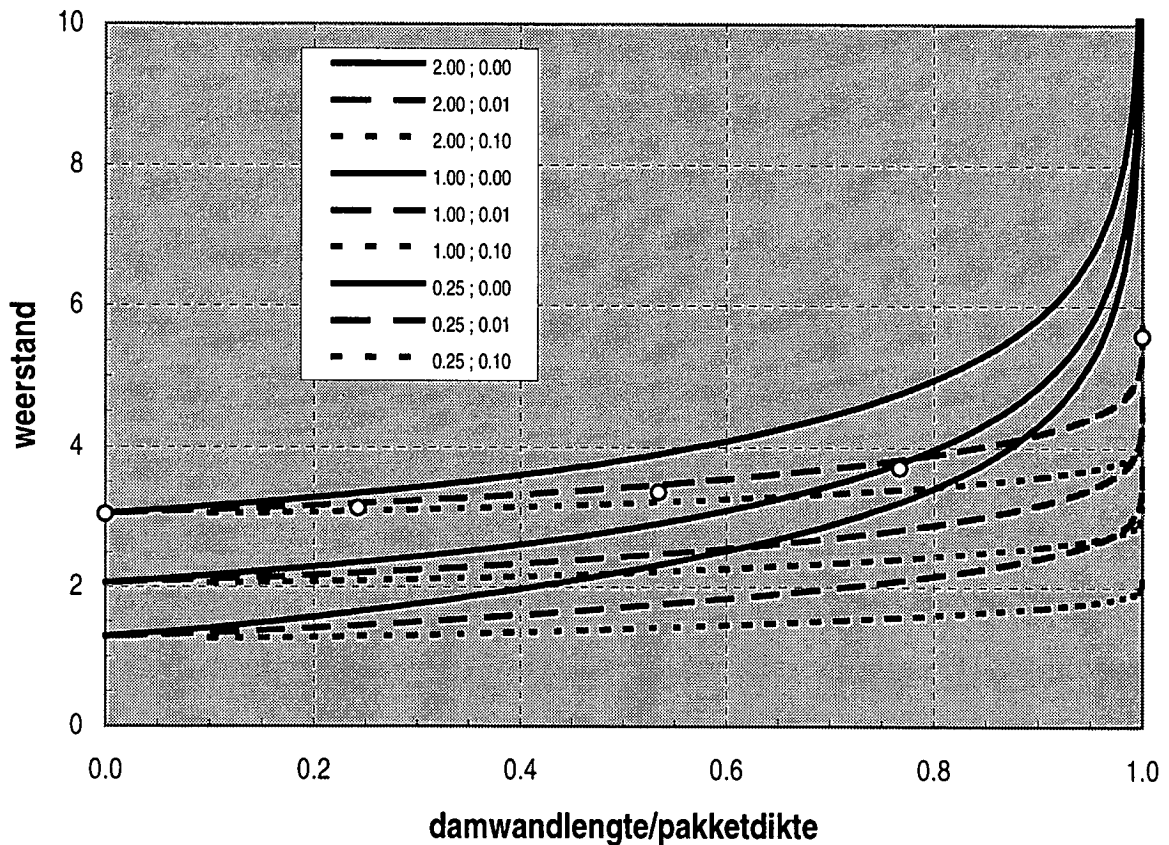
Vergeet niet dat er geldt:

$D/L = K(1 - \mu) / K(\mu)$ . Met behulp van [Abramowitz, Stegun 1968], 16.13.1 en 16.15.3 ontstaan er dan sinusoidale en hyperbolische relaties, zoals weergegeven in de tabel onderaan de pagina.

Na dit voorbereidende werk is het niet moeilijk meer de parameter, karakteristiek en gatpositie vast te stellen met behulp van (7.6). Ze zijn vermeld onderaan in de onderste tabel. In deze waarden spelen vijf afstanden een rol: de pakketdikten van beide subfragmenten, de damwandlengte, de dijk lengte en de grootte van het gat. Omdat in de formules alleen verhoudingen van afstanden voorkomen, zijn er dus vier onafhankelijke grootheden.

$\zeta$	linker subfragment	rechter subfragment
$\mathcal{K}$	$\infty$	$\infty$
$\mathcal{L}$	$\sec^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{d_L}{D_L} \right\}$	$\csc^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - d_L}{D_R} \right\}$
$\mathcal{M}$	$\operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_L}{D_L} \right\}$	1
$\mathcal{N}$	0	0
$\mathcal{Q}$	$\sec^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{r}{D_L} \right\}$	$\csc^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - r}{D_R} \right\}$
$\mathcal{G}$	1	$\csc^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L}{D_R} \right\}$
$m$	$\frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{d_L}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_L}{D_L} \right\}}$	$\sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - d_L}{D_R} \right\}$
$n$	$\frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{r}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_L}{D_L} \right\}}$	$\sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - r}{D_R} \right\}$
$w_G$	$\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_L}{D_L} \right\}$	$\csc^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L}{D_R} \right\}$

Tabel 7.2: hoekpunten voor halfoneindige fragmenten



Figuur 7.3: weerstand als functie van de damwandlengte

De invloed van het gat is zichtbaar gemaakt in *Figuur 7.3*. Hierin is de weerstand uitgezet tegen de genormeerde damwandlengte. Dit is de verhouding tussen de damwandlengte onder de linker bovenrand en de linker pakketdikte. Er zijn negen lijnen getekend in drie groepen van drie. De getrokken lijnen gelden voor het ontbreken van een gat; de gestreepte verwijzen naar een gat van 1 % van de pakketdikte; de gestippelde naar een gat van 10 %. De gatmaten betreffen het gehele gat en niet slechts de bovenste helft. De drie groepen vertegenwoordigen van boven naar beneden een lengte-dikteverhouding in het linker fragment van 2.00, 1.00 en 0.25.

Als de damwand relatief kort is heeft een gat weinig invloed. Het water kan gemakkelijk onder de damwand door afstromen. Maar als de damwand langer wordt, wordt de invloed van een gat groter. Het water kan steeds moeilijker onder de damwand door stromen en kiest de makkelijkere weg door het gat. Een aanzienlijke reductie van de weerstand kan het gevolg zijn.

De pakketdikte rechts is 1.25 maal groter dan die links. Dit verzekert een stromingsverloop in de buurt van het gat zoals beoogd bij de simulatie door middel van een bron. De vraag is, wat er gebeurt, als de beide pakketten even dik zijn. Dan wordt het cirkelvormige stromingspatroon al snel uit elkaar getrokken. Echter, de rekenexercitie blijft uitkomsten genereren, die er betrouwbaar uitzien. Dit betekent, dat deze uitkomsten wel waarde hebben als simulatie van de extra lek, maar een vertrokken relatie gaan vertonen met een gerelateerde gatgrootte.

Het gaat bij het in rekening willen brengen van de invloed van een gat eigenlijk niet om de werkelijke gatgrootte. Gaten zitten diep onder de constructie en worden vrijwel nooit opgemeten. Het gaat om de kans van het optreden van een eventueel gat. Als hiervoor een gemiddelde en standaardafwijking kan worden opgegeven, dan is de huidige aanpak een goed instrument om de veiligheid van constructies mede mee af te schatten. Ook de bijzondere gevallen, zoals een gat aansluitend op de kanaalvloer, blijven hierbij waardevol.

Om te controleren of de uitgevoerde berekeningen zinnig zijn zijn er enkele schaduwberekeningen gemaakt met MSEEP. Deze zijn uitgevoerd voor een lengte-dikteverhouding van 2.00 en een gatgrootte van 1 %. De resultaten zijn eveneens aangegeven in *Figuur 7.3* door middel van cirkeltjes. De overeenkomst is zeer goed ondanks het feit dat zowel de analytische oplossing als de numerieke schematisatie benaderingen zijn. De analytische oplossing heeft het gat gesimuleerd door een bronterm. Daarentegen is een zeer kleine elementgrootte rond het gat in MSEEP vereist, wat in conflict kan komen met het maximaal mogelijke aantal elementen. MSEEP lijkt iets lagere resultaten te genereren. De verschillen zijn kleiner dan 3 %.

## - II Lek door damwand

Op dit moment is de invloed van een gat voldoende vastgelegd. Behalve door een slechte aansluiting kan een damwand ook lekken door het niet geheel waterdicht zijn van de wand zelf. Een damwand van bentoniet is niet geheel waterdicht, evenals de sloten van stalen damwanden. Dit soort lek loopt synchroon aan de afleiding voor het gat. Immers, lek kan worden opgevat als kleine debietjes uit een hele serie gaatjes.

In *Figuur 7.1* zijn twee subfragmenten geschetst met een gat in de onderlinge damwand. Deze situatie kan ook als uitgangspunt voor de lek gekozen worden. Het verschil is dat er niet alleen water door het gat wegsijpelt, maar over de gehele hoogte van de damwand. Er is dus niet een enkel gaatje, maar een hele serie over de hele hoogte van de damwand. De invloed van al deze gaten moet dus worden opgeteld (geïntegreerd).

Vergelijking (7.2) ondersteund door (7.1) mag direct worden overgenomen. De relatie geldt voor slechts één bron en moet dus worden gesommeerd. Dit voert tot de volgende notatie:

$$\begin{aligned} \Phi_R - P_R &= \int^{\text{damwand}} \delta q G(w_G, n; m)_R dy - Q \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_R}{K(m)_R} \\ \Phi_L - P_L &= - \int^{\text{damwand}} \delta q G(w_G, n; m)_L dy + Q \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_L}{K(m)_L} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Na vermenigvuldiging links en rechts met  $\delta Q$  is dit gatdebiet vervangen door het specifieke lekdebiet  $\delta q$ . Dit lekdebiet is werkzaam over een infinitesimale hoogte  $dy$  van de damwand. Vervolgens zijn alle bijdragen langs de damwand gesommeerd.  $w_G$  stelt de positie voor, waar de waarde van de potentiaal geldt;  $n$  geeft de positie van een bron weer en moet dus tijdens integratie worden gevarieerd.

De damwandlek wordt geacht Darciaans van karakter te zijn. Het specifiek debiet is dus evenredig met het verhang. Geven we de damwand een doorlatendheid  $k'$  en een dikte  $t$  dan volgt er voor het specifiek debiet:

$$\delta q = \frac{k'}{t} \left\{ \frac{\Phi_L - P_L}{k} - \frac{\Phi_R - P_R}{k} \right\} = \frac{Q k' F(\vartheta_G | 1-m)_L}{t k K(m)_L} + \frac{Q k' F(\vartheta_G | 1-m)_R}{t k K(m)_R} - \int^{\text{damwand}} \left\{ G(w_G, n; m)_L + G(w_G, n; m)_R \right\} \frac{k' \delta q}{k t} dy \quad (7.8)$$

Het verhang is het quotiënt van stijghoogteverschil en damwanddikte; de stijghoogte volgt uit het quotiënt van potentiaal en doorlatendheid.

Via vergelijking (7.8) ligt het lekdebet op impliciete wijze vast. We hebben te maken met een Fredholm integraalvergelijking van de tweede soort. Dit type speelt ook een rol in het mechanisme van onderloopsheid. Het oplossen van de nog onbekende functie, in dit geval  $\delta q$ , kan buitengewoon moeilijk zijn, zoals de ervaring bij onderloopsheid leert. Daar wordt de uitwerking gefrustreerd door de invloed van singuliere punten, vanwaaruit oscillaties worden gegenereerd. Gelukkig hebben we bij het huidige lekprobleem hier geen last van. Het blijkt dat een standaard numerieke aanpak al tot hele acceptabele resultaten leidt.

Eerst wordt vergelijking (7.8) herschikt in een typische Fredholm vorm:

$$\frac{k}{k' t} \frac{\delta q}{Q} + \int^{\text{damwand}} \frac{\delta q}{Q} \left\{ G(w_G, n; m)_L + G(w_G, n; m)_R \right\} dy = \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_L}{K(m)_L} + \frac{F(\vartheta_G | 1-m)_R}{K(m)_R} \quad (7.9)$$

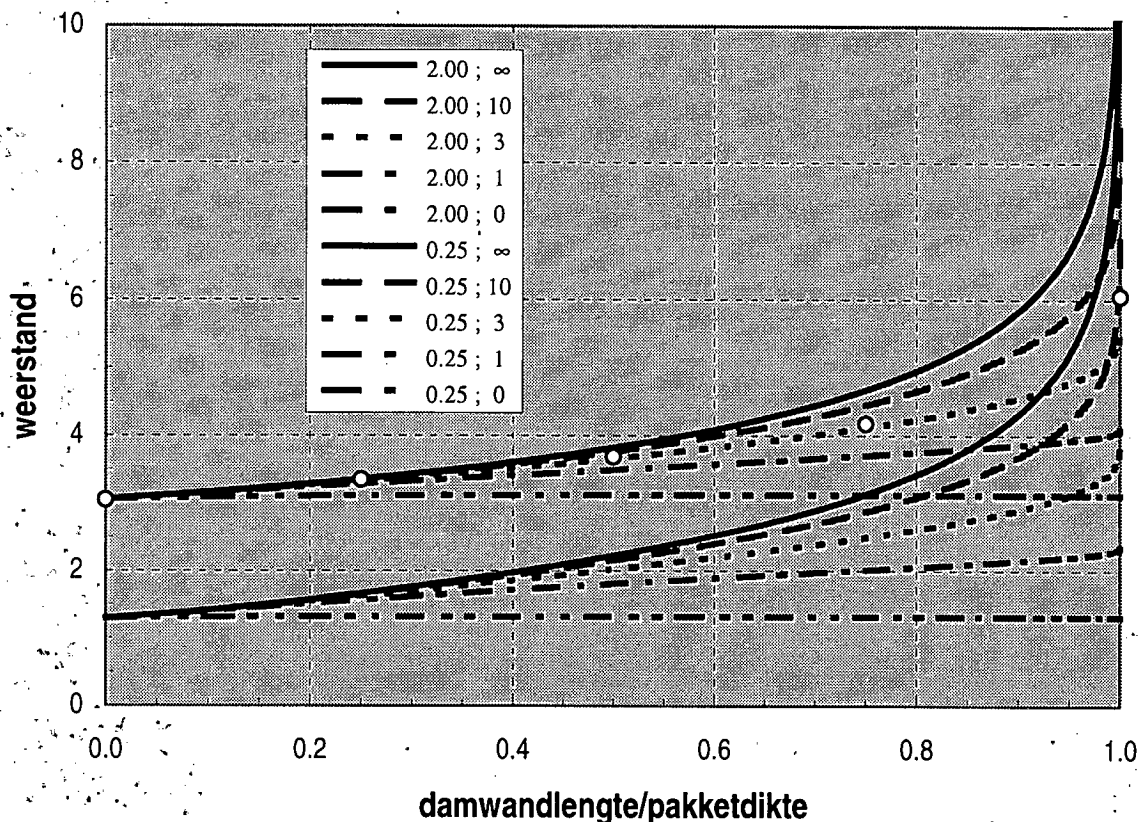
Vervolgens wordt de damwand opgedeeld in elementjes van gelijke lengte. Op de randen van de elementjes worden discrete waarden voor  $\delta q$  gespecificeerd. In het hart van de elementjes worden de bronnen geplaatst. De integraal kan nu uitgeschreven worden in een lineair numeriek schema. Op deze wijze wordt de integraalvergelijking geschreven als een matrixvergelijking in de discrete lekwaarden. Deze discrete lekwaarden volgen met behulp van matrixrekening.

De eerste stap om de weerstand vast te leggen is hiermee voltooid. De volgende stap is het verwerken van de bepaalde lekdebieten in de weerstandsformule. Deze weerstandsformule is al bepaald in de vorige paragraaf, (7.5). Hierin wordt de bijdrage van alle bronnen gesommeerd:

$$W = \frac{P_R - P_L}{Q} = \frac{K(1-m)_L}{K(m)_L} + \frac{K(1-m)_R}{K(m)_R} - \int^{\text{damwand}} \frac{\delta q}{Q} \left\{ \frac{F(\varepsilon | 1-m)_L}{K(m)_L} + \frac{F(\varepsilon | 1-m)_R}{K(m)_R} \right\} dy \quad (7.10)$$

De integraal in deze relatie wordt op dezelfde wijze als de integraal in vergelijking (7.8) numeriek uitgewerkt. De discrete lekdebieten zijn in dit stadium bekend. Aldus ligt de waarde van de weerstand vast. Natuurlijk moet daarbij gebruik gemaakt worden van de specificaties van de parameters  $m$  en  $n$  in (7.6) en van bijlage B, Positionering karakteristieke punten.

Aan de hand van hetzelfde voorbeeld als bij het gat zal de invloed van lek op de weerstand zichtbaar worden gemaakt. Dit voorbeeld is geschetst in *Figuur 7.2*. De karakteristieke punten kunnen



Figuur 7.4: weerstand als functie van de damwandlengte

overgenomen worden uit Tabel 7.2. In Figuur 7.4 is het gedrag van de weerstand als functie van de genormeerde damwandlengte geïllustreerd.

Er zijn tien lijnen getekend in twee groepen van vijf. Binnen elke groep is de mate van doorlatendheid van de damwand in rekening gebracht via de parameter:  $kt/k'D_L$ . Hiervoor zijn de waarden  $\infty$ , 10, 3, 1 en 0 gekozen. De groepen vertegenwoordigen van boven naar beneden een lengte-dikte-verhouding in het linker fragment van 2.00 en 0.25.

Het is zonder meer verbazingwekkend hoe goed een volledig lekke damwand gesimuleerd wordt. Voor alle damwandlengten is hiervoor een waarde verkregen die vrijwel overeenkomt met die voor het ontbreken van een damwand. Dit ligt niet a priori voor de hand. De oplossing voor het ontbreken van een damwand is relatief eenvoudig. Die voor een volledig lekke damwand bestaat uit de relatief eenvoudige oplossing voor een volledig dichte damwand, gecorrigeerd met een ingewikkeld patroon van bronbijdragen.

Dat dit fysisch goed afloopt is in te zien aan de hand van relatie (7.7). Als de damwand geen weerstand heeft zijn de potentialen aan weerszijden ervan gelijk. Eliminatie van de potentialen leidt dan precies tot wat (7.9) weergeeft als de eerste term wegvalt. Dat dit mathematisch op rolletjes loopt dwingt toch wel verwondering af.

Om te controleren of de uitgevoerde berekeningen zinnig zijn zijn er enkele schaduwberekeningen gemaakt met MSEEP. Deze zijn uitgevoerd voor een lengte-dikteverhouding van 2.00 en een doorlaatfactor  $k t / k' D_L$  van 3. De resultaten zijn eveneens aangegeven in *Figuur 7.3* door middel van cirkeltjes. De overeenkomst is zeer goed ondanks het feit dat zowel de analytische oplossing als de numerieke schematisatie benaderingen zijn. De analytische oplossing heeft het gat gesimuleerd door een bronterm. MSEEP past ter plaatse van de damwand elementen toe met aangepaste eigenschappen.

MSEEP lijkt iets hogere resultaten te genereren. De verschillen blijven kleiner dan 1.5 %, behalve voor het geval de damwand zich over het hele pakket uitstrekt. Het verschil is dan 5 %. Een damwand over de volledige hoogte vergt wel erg veel van de toegepaste numerieke simulaties. Het is een wonder dat de overeenstemming nog zo goed is.





## 8 Zakkings- en opdrijffragment

Bij sluisen gefundeerd op palen ontstaat vrijwel altijd een spleet tussen vloer en watervoerend pakket. Dit is van groot belang voor de weerstand. Het water hoeft niet louter en alleen door het zand te stromen, maar kiest de kortste weg naar de spleet, erdoorheen en er weer uit. De weerstand in de spleet is verwaarloosbaar, als deze van de orde centimeters is.

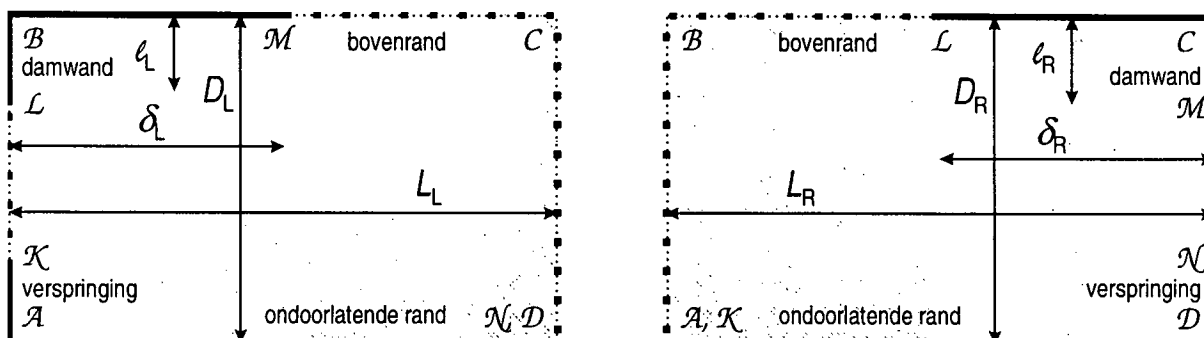
Dit betekent dat onder een sluisvloer de mogelijkheid van een spleet moet worden gemodelleerd. Het universele fragment biedt hiertoe mogelijkheden. De druk onder de sluisvloer is niet op voorhand bekend, maar ligt vast door de voorwaarde dat er geen water uit de spleet kan verdwijnen. Er komt aan de ene kant net zoveel in als er aan de andere kant uitgaat.

Een situatie die hier op lijkt is een toestand van opdrijven. De waterdruk in het zand is zo hoog, dat de afsluitende kleilaag omhooggedrukt wordt. Er ontstaat een spleet, waarin de druk gerelateerd is aan het gewicht van de kleilaag. Hier is het nettodebiet naar de spleet niet a priori nul. Er moet dus of een mogelijkheid zijn het watersurplus te spuien of de opdrijfzone moet zo lang kunnen worden, dat voor die bijzondere lengte net geen nettodebiet optreedt. Hierop komen we later in dit hoofdstuk terug.

De modellering van zowel het zakkingsfragment als het opdrijffragment verloopt over een groot deel identiek. Pas later zullen de resultaten op een verschillende wijze geïnterpreteerd moeten worden. Eerst zal het algemene deel geformuleerd worden. Vervolgens worden er twee paragrafen gewijd aan het specifieke gedrag van de afzonderlijke fragmenten.

### - I Gemeenschappelijke afleiding

Net als bij het gat- en lekfragment wordt het zettings- en opdrijffragment samengesteld uit twee subfragmenten. Op de aansluiting hiervan is een verspringing niet zinvol. De reden hiervan is dat alleen de lengte van de fragmenten samen vastligt. De positie van de onderlinge scheidslijn is kunstmatig en wordt zo gekozen dat op de bovenrand een vaste potentiaal mogelijk is. Een verspringing is wel mogelijk aan de begin en eindzijde. De bovenzijde is in ieder geval gedeeltelijk afgesloten helemaal tot aan begin en eindzijde, waar eventueel nog een damwand op aan mag sluiten.



Figuur 8.1: zettings- of opdrijffragment met open rand

Het te bepalen fragment wordt nu in twee subfragmenten opgedeeld. De opdeling geschiedt op een gunstige plaats, bijvoorbeeld het midden van de drukrand. Voor de subfragmenten gaan we twee verschillende berekeningen maken. Een, waarbij de onderlinge rand open is, zoals geschetst in *Figuur 8.1*, en een, waarbij de onderlinge rand dicht is, zoals geschetst in *Figuur 8.2*.

De reden van twee berekeningen is het feit dat het debiet naar de bovenrand geregeld moet kunnen worden. Dit regelen kan door de onderlinge rand te verschuiven. Maar dit garandeert niet altijd succes. Zeker niet als er alleen water naar de spleet stroomt en niet meer terug. Het zal duidelijk worden dat een afstemming van de diverse debieten in beide berekeningen apart wel tot het gewenste resultaat leidt.

Begonnen wordt met de open subfragmenten in *Figuur 8.1*. Van belang voor het formuleren van de weerstand is de waarde van de complexe potentiaal in punt  $B$  van het rechter subfragment of punt  $C$  van het linker subfragment. Deze waarde geeft namelijk aan hoeveel water er door het onderlinge vlak stroomt en hoeveel naar de bovenrand. Voor het rechter subfragment zal nu eerst hiervoor een beschrijving worden geformuleerd.

Omdat er geen bronterm is, wordt de algemene formulering van het universele fragment een stuk eenvoudiger. Dit is in hoofdstuk 6, Huidige fragmenten, al aan de orde geweest. We nemen de aangepaste vergelijking (6.2) over:

$$\begin{aligned}
 mw = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{-\Omega + P}{Q} \operatorname{K}(m) | 1-m \right\} & \quad \frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{K}(1-m)}{\operatorname{K}(m)} & \quad w = \frac{\zeta - \zeta_N}{\zeta_M - \zeta_N} \\
 \zeta = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{z}{L} \operatorname{K}(\mu) | \mu \right\} & \quad \frac{D}{L} = \frac{\operatorname{K}(1-\mu)}{\operatorname{K}(\mu)} & \quad \frac{1}{m} = \frac{\zeta_L - \zeta_N}{\zeta_M - \zeta_N}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Omdat de punten  $A$  en  $K$  samenvallen (geen verspringing), gaat  $\zeta_K$  naar oneindig, waardoor de relatie tussen  $w$  en  $\zeta$  iets eenvoudiger is. Verder is er een relatie voor  $m$  toegevoegd, die volgt uit de positie van punt  $L$ , zie *Figuur 5.1*.

De weerstand volgt uit de uitdrukking voor  $P/Q$ . Deze hangt af van  $m$ , die gerelateerd is aan de geometrie. Deze is geschaald volgens  $D/L$ . Er is echter nog wel de voorwaarde dat er door de onderlinge rand een zelfde hoeveelheid water stroomt. Daarom moet ook de potentiaal in punt  $B$ , zie *Figuur 8.1* verstrekt worden. Dit punt ligt in dit geval op het instroomoppervlak  $KL$ , wat inhoudt dat het reële deel van de potentiaal gelijk is aan  $P$ . Het imaginaire deel, de stroomfunctie, moet nog worden vastgesteld.

We vullen nu punt  $B$  in in relatie (8.1). Voor  $P - \Omega_B$  schrijven we  $-i\Psi_B$ ;  $\zeta_B$  is gelijk aan 1, zie *Figuur 5.1*. Het hulpvlak  $w$  is niet meer nodig en wordt geëlimineerd:

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - \zeta_N}{\zeta_L - \zeta_N} = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{-i\Psi_B}{Q} \operatorname{K}(m) | 1-m \right\} & \quad \frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{K}(1-m)}{\operatorname{K}(m)} \\
 \zeta = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{z}{L} \operatorname{K}(\mu) | \mu \right\} & \quad \frac{1}{m} = \frac{\zeta_L - \zeta_N}{\zeta_M - \zeta_N} & \quad \frac{D}{L} = \frac{\operatorname{K}(1-\mu)}{\operatorname{K}(\mu)}
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Al deze uitdrukkingen zijn reëel, ofschoon er nog wel een  $i$  in de eerste formule wordt aangetroffen. Deze werken we formeel weg via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.20.3. Omdat een uitdrukking in sn gewenst is wordt het resultaat via 16.8.10 nog eens omgeschreven. Dit tussenresultaat voor de stroomfunctie schrijven we uit:

$$\frac{\zeta_L - \zeta_N}{1 - \zeta_N} = \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{Q - \Psi_B}{Q} K(m) \mid m \right\} \quad (8.3)$$

Dit is het moment om een expliciete uitdrukking voor de stroomfunctie te verkrijgen. Inversie van elliptische functies volgt via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.1.3 en 5:

$$\frac{Q - \Psi_B}{Q} K(m) = F \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_L - \zeta_N}{1 - \zeta_N}} \mid m \right) \quad (8.4)$$

$\Psi_B$  stelt de hoeveelheid water voor die de lijn  $\mathcal{BL}$  passeert;  $Q - \Psi_B$  de hoeveelheid water die de lijn  $\mathcal{KB}$  passeert; en natuurlijk is  $Q$  de hoeveelheid die de lijn  $\mathcal{KL}$  passeert.

In plaats van een sn-functie met  $Q - \Psi_B$  in formule (8.3) zou ook een sn-functie met  $\Psi_B$  opgesteld kunnen worden. Op dezelfde manier zou er dan eveneens een expliciete relatie voor  $\Psi_B$  gevolgd zijn. Deze is identiek aan de huidige, wat gecontroleerd kan worden via [Abramowitz, Stegun 1968], 17.4.13. Er is geen specifieke voorkeur voor een van beide uitdrukkingen.

De voorwaarde dat er door de onderlinge rand evenveel moet stromen volgt uit (8.4):

$$Q - \Psi_B = \frac{Q_L}{K(m)_L} F \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_L - \zeta_N}{1 - \zeta_N}} \mid m \right)_L = \frac{Q_R}{K(m)_R} F \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_L - \zeta_N}{1 - \zeta_N}} \mid m \right)_R \quad (8.5)$$

In dit huidige probleem zijn de geometrische posities lijnvast. Hiermee wordt bedoeld dat ze niet op verschillende lijnstukken liggen, zoals bij het lekprobleem mogelijk is. De posities kunnen dus eenduidig gekoppeld worden aan enkele lengtematen. Met behulp van bijlage B, Positionering karakteristieke punten, volgen ze eenvoudig uit [B.3], [B.7] en [B.8]. Ze worden vermeld samen met de resterende van belang zijnde verbanden uit (8.2):

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} & \frac{1}{m} &= \frac{\zeta_L - \zeta_N}{\zeta_M - \zeta_N} & \frac{D}{L} &= \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \\ \zeta_L &= & & & &= \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{L-\delta}{L} K(\mu) \mid \mu \right\} \\ \zeta_M &= (1-\mu) \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} & & & &= 1 - \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} \\ \zeta_N &= (1-\mu) \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell-D''+d''}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} & & & &= 1 - \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{D-\ell-D''+d''}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Het eerste deel van ons doel is hiermee bereikt. Op grond van voorwaarde (8.5) wordt een keus gemaakt voor een bijdrage aan het linker en rechter debiet. Via (8.6) ligt dan de bijbehorende potentiaal vast. Linker en rechter debiet zijn gekoppeld en kunnen uitgedrukt worden in een gemeenschappelijk debiet  $Q_\psi$ . De volgende notatie is handig:

$$Q_L^\Psi = \frac{Q_\Psi}{K(m)_R} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\zeta_L - \zeta_N}{1 - \zeta_N}} \mid m\right)_R^\Psi \quad Q_R^\Psi = \frac{Q_\Psi}{K(m)_L} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\zeta_L - \zeta_N}{1 - \zeta_N}} \mid m\right)_L^\Psi \quad (8.7)$$

De index  $\Psi$  slaat op open berekening.

Het is duidelijk dat de huidige keus van debieten onvoldoende vrijheid geeft om bijvoorbeeld te eisen dat ze gelijk zijn, zoals bij een zettingsfragment. Daarom wordt een tweede berekening gemaakt voor de situatie van *Figuur 8.2*. Hier wordt het linker subfragment aangepakt. Van belang voor het formuleren van de weerstand is hier de waarde van de complexe potentiaal in punt  $\mathcal{D}$  van het linker subfragment. Deze waarde geeft namelijk de potentiaal aan, die natuurlijk continu moet zijn over de subfragmenten.

Het stelsel vergelijkingen dat geldt voor deze situatie wordt ook hier overgenomen uit (6.2):

$$mw = \operatorname{dn}^2\left\{\frac{-\Omega + P}{Q} K(m) \mid 1-m\right\} \quad \frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad w = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta - \zeta_N}{\zeta - \zeta_K} \quad (8.8)$$

$$\zeta = \operatorname{dn}^2\left\{\frac{z}{L} K(\mu) \mid \mu\right\} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad \frac{1}{m} = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_L - \zeta_N}{\zeta_L - \zeta_K}$$

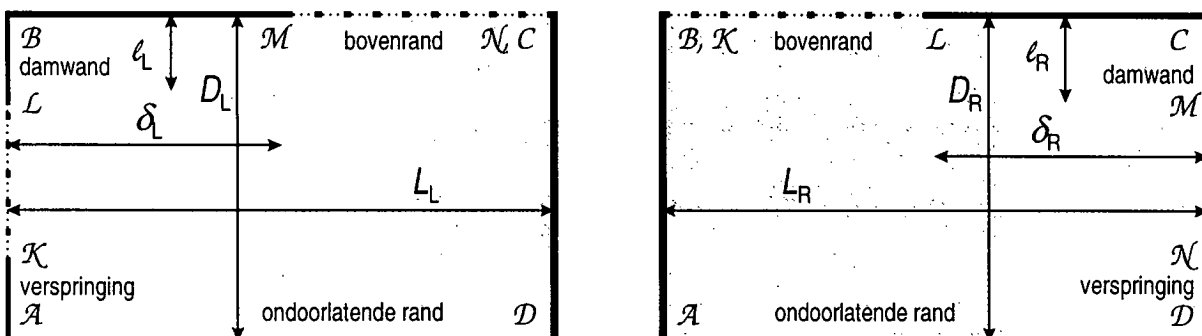
Er is een relatie voor  $m$  toegevoegd, die volgt uit de positie van punt  $\mathcal{L}$ , zie *Figuur 5.1*.

De weerstand volgt uit de uitdrukking voor  $P/Q$ . Deze hangt af van  $m$ , die gerelateerd is aan de geometrie. Deze is geschaald volgens  $D/L$ . Er is echter nog wel de voorwaarde dat de potentiaalval op de onderlinge rand gelijk is. Daarom moet ook de potentiaal in punt  $\mathcal{D}$ , zie *Figuur 8.2* verstrekt worden. Dit punt ligt in dit geval op de ondoorlatende rand  $\mathcal{N}\mathcal{K}$ , wat inhoudt dat het imaginaire deel van de potentiaal gelijk is aan  $iQ$ . Het reële deel, de potentiaal, moet nog worden vastgesteld.

We vullen nu punt  $\mathcal{D}$  in in relatie (8.8). Voor  $P - \Omega_{\mathcal{D}}$  schrijven we  $P - \Phi_{\mathcal{D}} - iQ$ ;  $\zeta_{\mathcal{D}}$  is gelijk aan 0, zie *Figuur 5.1*. Het hulpvlak  $w$  is niet meer nodig en wordt geëlimineerd:

$$\frac{\zeta_L - \zeta_K}{\zeta_L - \zeta_N} \frac{\zeta_N}{\zeta_K} = \operatorname{dn}^2\left\{\frac{P - \Phi_{\mathcal{D}} - iQ}{Q} K(m) \mid 1-m\right\} \quad m = \frac{\zeta_M - \zeta_N}{\zeta_M - \zeta_K} \frac{\zeta_L - \zeta_K}{\zeta_L - \zeta_N} \quad (8.9)$$

Om deze uitdrukking reëel te maken wordt [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8.3 toegepast. Houdt hierbij wel in het oog dat  $P/Q$  een quotiënt van elliptische integralen is. Er volgt:



*Figuur 8.2: zettings- of opdrijffragment met gesloten rand*

$$\frac{\zeta_K - \zeta_M}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_N}{\zeta_K} = \text{sc}^2 \left\{ \frac{\Phi_D}{Q} \text{K}(m) | 1-m \right\} \quad \text{of} \quad \frac{\zeta_N^{-1} - \zeta_M^{-1}}{\zeta_M^{-1} - \zeta_K^{-1}} = \text{cs}^2 \left\{ \frac{\Phi_D}{Q} \text{K}(m) | 1-m \right\} \quad (8.10)$$

Omdat  $\text{sn}^2 + \text{cn}^2 = 1$  volgt er een uitdrukking in  $\text{sn}$  alleen. Het resultaat wordt via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.1.3 en 5 expliciete geschreven:

$$\frac{\zeta_M^{-1} - \zeta_K^{-1}}{\zeta_N^{-1} - \zeta_K^{-1}} = \text{sn}^2 \left\{ \frac{\Phi_D}{Q} \text{K}(m) | 1-m \right\} \quad \text{of} \quad \frac{\Phi_D}{Q} \text{K}(m) = \text{F} \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_M^{-1} - \zeta_K^{-1}}{\zeta_N^{-1} - \zeta_K^{-1}}} | 1-m \right) \quad (8.11)$$

$\Phi_D$  stelt het potentiaalverschil voor met punt  $\mathcal{N}$ ;  $P - \Phi_D$  het verschil met punt  $\mathcal{K}$ . Om de eerste grootheid draait het. De voorwaarde dat er over de onderlinge rand eenzelfde potentiaalsprong staat luidt:

$$\Phi_D = \frac{Q_L}{\text{K}(m)_L} \text{F} \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_M^{-1} - \zeta_K^{-1}}{\zeta_N^{-1} - \zeta_K^{-1}}} | 1-m \right)_L = \frac{-Q_R}{\text{K}(m)_R} \text{F} \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_M^{-1} - \zeta_K^{-1}}{\zeta_N^{-1} - \zeta_K^{-1}}} | 1-m \right)_R \quad (8.12)$$

Vergeet het min-teken niet; in het rechtersubfragment gaat het debiet nu de andere kant uit! De posities van de hoekpunten zijn eenduidig gekoppeld aan de relevante lengtematen. Met behulp van bijlage B, Positionering karakteristieke punten, volgen ze eenvoudig uit [B.3], [B.7] en [B.8]. Ze worden vermeld samen met de resterende van belang zijnde verbanden uit (8.8):

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{\text{K}(1-m)}{\text{K}(m)} & \frac{1}{m} &= \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_L - \zeta_N}{\zeta_L - \zeta_K} & \frac{D}{L} &= \frac{\text{K}(1-\mu)}{\text{K}(\mu)} \\ \zeta_K &= \text{ns}^2 \left\{ \frac{D-\ell-D'+d'}{D} \text{K}(1-\mu) | 1-\mu \right\} & \zeta_M &= \text{dn}^2 \left\{ \frac{\delta}{L} \text{K}(\mu) | \mu \right\} \\ \zeta_L &= \text{ns}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} \text{K}(1-\mu) | 1-\mu \right\} & \zeta_N &= 1-\mu \end{aligned} \quad (8.13)$$

Het tweede deel van ons doel is hiermee bereikt. Op grond van voorwaarde (8.12) wordt een keus gemaakt voor een bijdrage aan het linker en rechter debiet. Via (8.13) ligt dan de bijbehorende potentiaal vast. Linker en rechter debiet zijn net als in het vorige geval gekoppeld en kunnen uitgedrukt worden in een gemeenschappelijk debiet  $Q_\Phi$ . De volgende notatie is handig:

$$Q_L^\Phi = \frac{Q_\Phi}{\text{K}(m)_R} \text{F} \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_M^{-1} - \zeta_K^{-1}}{\zeta_N^{-1} - \zeta_K^{-1}}} | 1-m \right)_R^\Phi \quad Q_R^\Phi = \frac{-Q_\Phi}{\text{K}(m)_L} \text{F} \left( \arcsin \sqrt{\frac{\zeta_M^{-1} - \zeta_K^{-1}}{\zeta_N^{-1} - \zeta_K^{-1}}} | 1-m \right)_L^\Phi \quad (8.14)$$

De index  $\Phi$  slaat op gesloten berekening.

Hiermee zijn de voorbereidende schermutselingen afgerond. Er zijn twee linker bijdragen en twee rechter bijdragen aan het debiet geformuleerd in (8.7) en (8.14). Hierin zitten twee graden van vrijheid om de debieten mee te sturen:  $Q_\Phi$  en  $Q_\Psi$ . Hiermee kan bijvoorbeeld gezorgd worden voor een gelijke instroom en uitstroom, zoals in het zettingsfragment, of het opleggen van een bepaalde druk, zoals in het opdrijfsegment.

De linker en rechter debieten volgen uit samenstelling van (8.7) en (8.14). Hierin schrijven we voor de amplitude de afkorting  $\vartheta$ . Het is niet nodig deze hier precies te specificeren, zoals ook geldt voor

de parameter  $m$ . Zodra er berekeningen uitgevoerd gaan worden, grijpen we terug op de plaatsen, waar de uitdrukkingen volledig staan uitgeschreven, zoals (8.5), (8.6), (8.12) en (8.13). De notatie wordt zo een stuk eenvoudiger:

$$\begin{aligned} Q_L &= Q_\Psi \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_R^\Psi + Q_\Phi \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_R^\Phi \\ Q_R &= Q_\Psi \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_L^\Psi - Q_\Phi \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_L^\Phi \end{aligned} \quad (8.15)$$

Deze debieten zijn gecorreleerd aan een potentiaalsprong, die bepaald is door vier verschillende weerstanden:

$$\begin{aligned} P_L - P_S &= Q_\Psi \left. \frac{K(1-m)}{K(m)} \right|_L^\Psi \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_R^\Psi + Q_\Phi \left. \frac{K(1-m)}{K(m)} \right|_L^\Phi \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_R^\Phi \\ P_S - P_R &= Q_\Psi \left. \frac{K(1-m)}{K(m)} \right|_R^\Psi \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_L^\Psi - Q_\Phi \left. \frac{K(1-m)}{K(m)} \right|_R^\Phi \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_L^\Phi \end{aligned} \quad (8.16)$$

De index  $s$  slaat op de waarde in de spleet. Nu zijn alle van belang zijnde grootheden uitgewerkt. We gaan verder met de speciale gevallen.

## - II Zettingsfragment

Bij een zettingsfragment zakt het zandpakket onder een sluis ietwat, terwijl de op palen gefundeerde vloer op hoogte blijft. De aldus ontstane spleet strekt zich dus uit over de gehele vloer, van damwand tot damwand. Dit betekent dat de lengte  $\delta$  reduceert tot nul. De waarde van  $\zeta_L$  in (8.6) vereenvoudigt dan tot  $1-\mu$ .

Omdat er naar de spleet geen netto instroom is, moet het debiet door het linker en rechter subfragment dus gelijk zijn. Via (8.15) levert dit de volgende voorwaarde op:

$$Q_L = Q_R = Q_\Psi \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_R^\Psi + Q_\Phi \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_R^\Phi = Q_\Psi \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_L^\Psi - Q_\Phi \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_L^\Phi \quad (8.17)$$

of:

$$Q_\Phi \left\{ \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_R^\Phi + \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_L^\Phi \right\} = Q_\Psi \left\{ \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_L^\Psi - \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_R^\Psi \right\} \quad (8.18)$$

Voor het debiet geldt dan:

$$\left\{ \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_L^\Psi - \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_R^\Psi \right\} Q_L = Q_\Phi \left\{ \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_R^\Phi \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_L^\Psi + \left. \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \right|_R^\Psi \left. \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \right|_L^\Phi \right\} \quad (8.19)$$

De weerstand over het hele fragment volgt dan door de beide vergelijkingen van (8.16) op te tellen en te delen door het debiet. Hierbij wordt gebruik gemaakt van (8.18). De volgende uitdrukking wordt verkregen:

$$\frac{P_L - P_R}{Q_L} \left\{ \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L + \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L \right\} =$$

$$\left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L + \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R \right\} \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L + \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L - \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L \right\} \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R$$

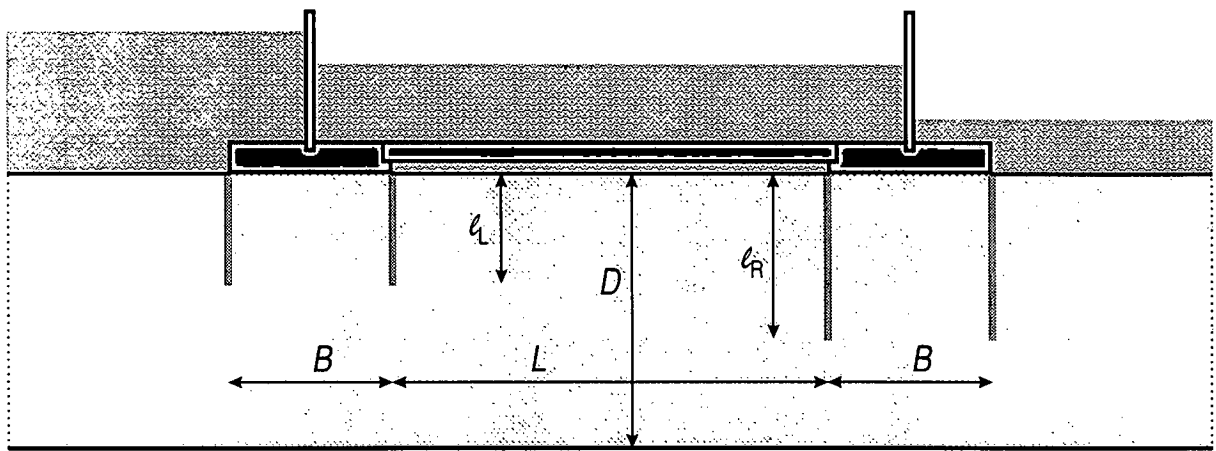
$$\left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L + \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R \right\} \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R + \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R - \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R \right\} \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L$$
(8.20)

Uit de regelmatige opbouw kan hoop geput worden dat er correcte analyse bedreven is. Numeriek kan er echter beter een ander pad gevolgd worden. Uit (8.18) wordt eerst de verhouding  $Q_\psi / Q_\phi$  bepaald. Via (8.17) volgt dan het totale debiet  $Q_L / Q_\phi$ . Tenslotte wordt (8.16) gebruikt om de weerstandstermen vast te leggen.

Aan de hand van een voorbeeld zal nu getoond worden, wat de invloed van een spleet is op de weerstand van een constructie. Dit voorbeeld betreft een sluis met dichte kolkvloer, geschetst in *Figuur 8.3*. Onder de sluisvloer bevindt zich een zettingsspleet. Onder de sluishoofden speelt een eventuele spleet niet zo'n belangrijke rol, omdat de hoofden een korte lengte hebben.

Binnen deze constructie hebben we te maken met drie typen fragmenten: een kop/staartfragment, een tussenfragment en een zettingsfragment. Het gaat ons hier om het gedrag van het laatste. Beide andere verhogen de weerstand onafhankelijk van de lengte van de sluisvloer en vormen daarom geen verstoring. Zij worden meegenomen, omdat aldus een complete constructie doorgerekend wordt.

In het beschouwde voorbeeld komen geen verspringen voor. Dit betekent dat de waarde van  $\zeta_N$  in (8.6) reduceert tot nul. Er is al aangegeven dat  $\zeta_L$  de waarde  $1-\mu$  aanneemt. Formules (8.5) en



*Figuur 8.3: sluis met dichte kolkvloer*

(8.6) kunnen daarom op compacte wijze worden samengenomen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad m = \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad (8.21)$$

$$\frac{Q_L}{K(m)_L} F(\arcsin \sqrt{1-\mu} \mid m)_L = \frac{Q_R}{K(m)_R} F(\arcsin \sqrt{1-\mu} \mid m)_R$$

In (8.13) gaat de waarde van  $\zeta_K$  naar oneindig en die van  $\zeta_M$  is 1. Ook (8.12) en (8.13) worden een stuk eenvoudiger. Vergeet hierbij [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8.10 en 16.9.1 niet:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad m = \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{\ell}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad (8.22)$$

$$\frac{Q_L}{K(m)_L} F(\arcsin \sqrt{1-\mu} \mid 1-m)_L = \frac{-Q_R}{K(m)_R} F(\arcsin \sqrt{1-\mu} \mid 1-m)_R$$

Recht onder de sluishoofden bevindt zich een tussenfragment. De hoofden zijn te kort om ze als zettingsfragmenten te moeten beschouwen. Tussenfragmenten zijn al bekeken in hoofdstuk 3, Beschrijving huidige fragmenten. Het resultaat van (6.7) wordt overgenomen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad \frac{D}{B} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad (8.23)$$

$$\sqrt{\frac{m}{1-\mu}} = \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) \mid 1-\mu \right\}$$

Hierin moet de lengte van de linker of rechter damwanden worden ingevuld. Het kop/staartfragment wordt overgenomen van (6.4):

$$\frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad m = \cos^2 \left( \frac{\pi \ell}{2 D} \right) \quad (8.24)$$

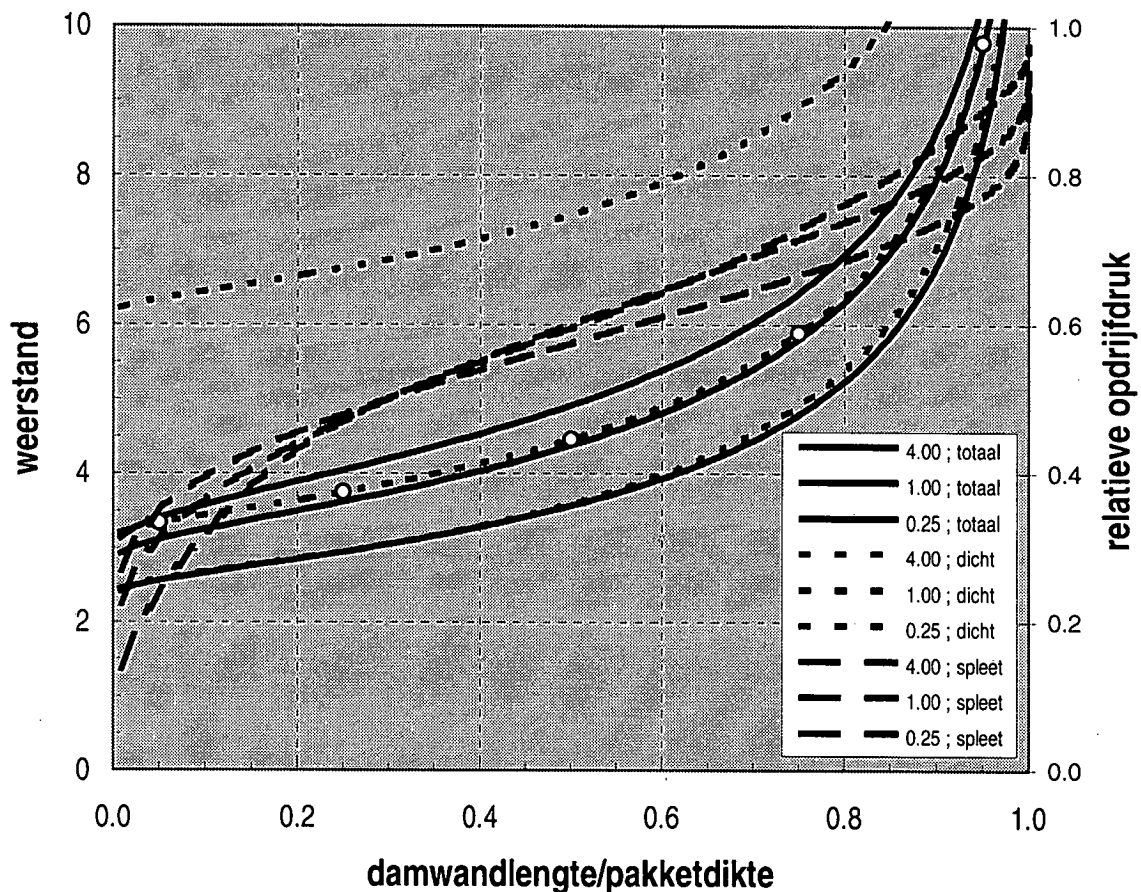
Merk op dat beide laatste grootheden zijn aangepast aan de geometrie van het huidige probleem.

In *Figuur 8.4* zijn enkele berekeningsresultaten weergegeven. Er zijn drie series van drie lijnen gepresenteerd. De getrokken serie betreft de weerstand als een spleet aanwezig is; de gestippelde, als een spleet ontbreekt. De streeplijnen geven het percentage aan van de opdrijfdruk. Er zijn onder de sluisvloer drie lengte/dikteverhoudingen gekozen: 0.25, 1.00 en 4.00. De sluishoofden hebben een vaste lengte/dikteverhoudingen van 0.30. De damwandlengten links strekken zich uit over de halve pakkethoogte. Rechts zijn deze gevarieerd.

Bij een lengte/dikteverhouding van 0.25 is nauwelijks onderscheid te zien tussen het geval met en zonder spleet. Bij 1.00 wordt de invloed zichtbaar. Bij 4.00 is het contrast groot. De reden is het feit dat transport door de spleet vele malen sneller is dan door het zandpakket zelf. Bij lange fragmenten wordt het grootste deel van het debiet door de spleet afgevoerd. Bij korte fragmenten is de weg naar en van de spleet langer dan direct door het zand.

Om te zien of de resultaten realistisch zijn is er een controleberekening gemaakt met het spreadsheet-programma dat ontwikkeld is in het kader van de heavingstudie, omschreven in [Sellmeijer 1995]. Deze zijn gemaakt voor een lengte/dikteverhouding van 1.00. De resultaten zijn in *Figuur 8.4*





Figuur 8.4: weerstand als functie van de damwandlengte

verwerkt en aangegeven door middel van cirkeltjes. Zij zijn exact gelijk aan het hier berekende geval voor de sluisvloer zonder spleet. Dit hoort zo, omdat de achterliggende theorie identiek is.

Een numerieke controle met het programma MSEEP is niet eenvoudig. Het is onrealistisch te proberen numeriek te itereren. Van tevoren de spleetdruk opgeven is flauw. Echter, gezien het feit dat de resultaten met en zonder spleet dicht bij elkaar liggen voor korte fragmenten en gezien het realistische patroon van de oprijfdruk, is er voldoende vertrouwen dat er goed gerekend is. Verderop wordt wel een controle uitgevoerd voor het verschijnsel opdrijven, waar exact dezelfde modellering gebruikt wordt. Dit komt nu aan de orde.

### - III Oprijffragment

Bij een oprijffragment wordt de afdichtende kleilaag door de waterdruk opgedreven. De korrelspanningen vallen weg en de waterdruk stelt zich in op het gewicht van de kleilaag. Er ontstaat een spleet, waarin de stijghoogte van het water constant is. Deze situatie is vergelijkbaar met het stromingspatroon, dat optreedt bij een zakkingsfragment.

Er is echter een essentieel verschil. Bij het zakkingsfragment is uitgegaan van het feit dat het water de spleet niet kan verlaten, omdat het opgesloten zit onder de sluisvloer. Alle water dat de spleet instroomt moet er dus ook weer uitstromen. Dit kan alleen worden verwezenlijkt als de druk in de spleet de vrijheid heeft zich hierop in te stellen. Bij het zakkingsfragment is dit het geval. De sluisvloer is goed verankerd aan de hoofden en drijft niet op. Alleen het zand eronder is iets gezet. Bij het opdrijffragment is de druk in de spleet voorgeschreven door het gewicht van de opgedreven klei. In een vast gekozen geometrie is het dus niet mogelijk het netto spleetdebiet af te regelen op nul. Deze situatie kan op zichzelf niet blijven voortbestaan. Er is òf een aanname nodig, die de stroming kunstmatig in stand houdt, òf de geometrie zal zich zodanig aanpassen, dat de waterbalans in orde komt.

Alvorens in te gaan op de gevolgen, zal de huidige situatie beschreven worden. Deze beschrijving vormt de basis voor verdere aannamen of aanpassingen. De blokken (8.15) en (8.16) zijn wederom het uitgangspunt. Maar de voorwaarde dat het debiet door de beide subfragmenten gelijk is hoeft niet meer op te gaan. Er blijft namelijk water in de spleet achter. De uitdrukkingen moeten afgeregeld worden op vaste potentialen ergens bovenstrooms en benedenstrooms.

Stel bovenstrooms is ergens een fragment met vaste potentiaal  $P_b$ . Dit mag eventueel een opdrijf-fragment zijn, maar vaak is het een kopfragment. De relatie tussen verval en debiet volgt dan uit de som van de weerstanden van alle doorlopen fragmenten, zoals aangegeven in (2.1). Ergens benedenstrooms is er een fragment met vaste potentiaal  $P_o$ . Dit is vaak een staartfragment. Ook hier geldt een relatie tussen verval en debiet. In formulevorm:

$$P_b - P_s = Q_L \sum_n^{\text{bovenstrooms + linker subfragment}} W_n \quad \text{en} \quad P_s - P_o = Q_R \sum_n^{\text{benedenstrooms + rechter subfragment}} W_n \quad (8.25)$$

De index  $s$  slaat op spleet. De index  $b$  slaat op boven (bovenstrooms);  $o$  slaat op onder (benedenstrooms).

Hierin vullen we de uitdrukkingen in voor de debieten uit (8.15). Hiervan zijn de weerstanden van de twee typen linker en rechter subfragmenten bekend zoals verwerkt in (8.16). De volgende uitdrukking wordt verkregen:

$$P_b - P_s = Q_\Psi \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi + \sum_n^{\text{boven strooms}} W_n \right\} + Q_\Phi \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi + \sum_n^{\text{boven strooms}} W_n \right\} \\ P_s - P_o = Q_\Psi \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi + \sum_n^{\text{beneden strooms}} W_n \right\} - Q_\Phi \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi + \sum_n^{\text{beneden strooms}} W_n \right\} \quad (8.26)$$

In deze vergelijking zijn alle potentialen bekend. De twee vergelijkingen voldoen dus om de debietsterkten vast te leggen. Hiermee is het opdrijfprobleem opgelost.

De rekenprocedure is als volgt. Uit (8.26) worden de waarden van  $Q_\Psi$  en  $Q_\Phi$  bepaald. Deze worden ingevuld in (8.15), waarmee het linker en rechter debiet vast liggen. Presentatie van de resultaten gaat

in de vorm van een weerstand over de constructie, begrepen op het linker debiet en de verhouding tussen het linker en rechter debiet.

Nu het stromingsprobleem is uitgeschreven, wordt een en ander overzichtelijker. Er kunnen nu een aantal karakteristieke situaties onderscheiden worden, gebaseerd op de onderlinge verhouding tussen het linker en rechter debiet. De volgende gevallen zullen worden besproken:  $Q_L < Q_R$ ,  $Q_L = Q_R$  en  $Q_L > Q_R$

Als  $Q_L < Q_R$ , stroomt er meer water de spleet uit dan in. De spleet verdwijnt dan. Dit rechtvaardigt niet de conclusie dat opdrijven geen probleem vormt. Er kan een te brede opdrijfzone verondersteld zijn. Dit kan eenvoudig getest worden door een berekening zonder opdrijven te maken en te controleren of de opdrijfspanning ergens overschreden wordt. Indien zo, dan moet een poging met een kleinere lengte gewaagd worden.

Indien  $Q_L = Q_R$ , gebeurt er niets. Het netto debiet naar de spleet is nul. De spleet wordt niet kleiner, maar ook niet groter. Dit is een perfect evenwicht, dat echter niet zomaar volgt uit een keuze van de modelleur. De natuur zelf zoekt dit op. Het volgende scenario ligt voor de hand.

Er dreigt ergens de opdrijfdruck overschreden te worden. Dit is niet mogelijk, zodat de druk blijft 'hangen' ten koste van debiet naar de ontstane spleet. De kleilaag wordt pneumatisch omhoog gepompt, waardoor de breedte van de spleet langer wordt. Immers, naburige delen van de kleilaag worden mee omhoog getrokken. Hierdoor kan een situatie ontstaan, waarin er bovenstrooms evenveel naar de spleet toestroomt als benedenstrooms er weer uit.

Met nadruk wordt gesteld 'KAN ontstaan', want geen enkele zekerheid is geboden. Dit is gemakkelijk in te zien aan de hand van een voorbeeld. Stel er is geen enkele mogelijkheid om de kwel te laten afstromen. De dijk zit potdicht. Dan staat overal onder de dijk de buitendruk. Bij opdrijven maakt het langer worden van de spleet niet uit. Er zal over de gehele lengte water naartoe blijven stromen.

Een goede aanpak om te onderzoeken of er een evenwicht mogelijk is, is eerst een berekening te maken zonder opdrijven. Dan wordt het gebied bepaald, waarin opdrijven een feit is. Als er nu voorbij dit gebied nog voldoende ruimte is, dan is een evenwicht mogelijk. De redentie is als volgt. In het gebied dat zeker zal opdrijven wordt de druk omlaaggebracht, zodat daar water naar de spleet zal gaan stromen. In het extra gebied wordt de druk omhoog gebracht, zodat daar water uit de spleet zal gaan stromen. Evenwicht ontstaat er als beide debieten gelijk zijn. Als eerste schatting kunnen beide gebieden evenlang genomen worden.

Omdat het niet a priori altijd mogelijk is een evenwicht te bereiken, moet rekening gehouden worden met de situatie  $Q_L > Q_R$ . Deze situatie blaast zichzelf op den duur op. Immers de rekken worden steeds groter, zodat bezwijken niet kan uitblijven. In de leidraad rivierdijken wordt verondersteld dat dit resulteert in de vorming van een wel, waardoor het surplus aan debiet zal worden afgevoerd.

Het ontstaan van een wel in een breukvlak is op zich een zinvolle veronderstelling. Het is echter de vraag of de rol van zo'n wel zich beperkt tot het passief afvoeren van een surplus aan water. Het ligt veel meer voor de hand dat de opdrijfdruck niet meer gehandhaafd kan blijven en zich zal richten op de lagere druk in de wel. De wel krijgt dan een actiever rol als zand meevoerende wel. Een heel ander fragment moet dan worden ingeschakeld: polderfragment.

In het projectplan worden de diverse situaties onderscheiden. Een beschrijving is gevraagd voor drie karakteristieke situaties: een waarbij er meer debiet naar de spleet stroomt dan eruit; een waarbij het netto debiet naar de spleet nul is; en een waarbij er alleen water in, maar niet uit stroomt. Al deze drie gevallen kunnen behandeld worden met de conditie (8.26) ondersteund door (8.15).

### **- i netto debiet naar de spleet**

Dit is het algemene geval, opgenomen in de leidraad rivierdijken en geaccodeerd door de TAWB. Er moet nog wel even gecontroleerd worden of het netto debiet positief is. Indien niet, dan is de opdrijf lengte te groot gekozen, of is er helemaal geen sprake van opdrijven. Indien wel, dan is het de vraag hoe het netto debiet kan worden afgevoerd.

Wanneer er een wel zou kunnen ontstaan met een regulerende ventielwerking ter grootte van de opdrijfdruk, dan zou het berekende stromingspatroon een uitstekend uitgangspunt zijn voor het opstellen van de weerstand. In de leidraad rivierdijken wordt deze werking aan een wel toegeschreven. Echter, er moet met klem op gewezen worden dat deze aanname hoogstwaarschijnlijk te optimistisch is.

Op kunstmatige wijze zou de gewenste ventielwerking nog wel gerealiseerd kunnen worden. In de kleilaag kan een gat geboord worden tot op de zandlaag. Hierin wordt een overdrukventiel aangebracht, dat ingesteld wordt op de opdrijfdruk. Het surplus debiet wordt dan ongemerkt afgevoerd tijdens opdrijven. Helaas is de natuur niet in staat een dergelijk subtiel ventiel te bouwen.

Door het surplus aan debiet ontstaat er ergens een scheur in de klei. Een wel is het gevolg. Hierin heerst niet de opdrijfdruk, maar een lagere spanning, behorende bij de kolom water in de wel. Het gevolg is dat de spleet leegloopt en de uitreeverhagen bij de wel groter worden. De wel wordt een zandmeevoerende wel, vanwaaruit zich een erosiekanaal ontwikkelt. Het verschijnsel verandert van opdrijven in onderloopsheid. De weerstand die hoort bij onderloopsheid heeft een iets andere waarde dan die voor opdrijven. Dit verschil is niet eens zo belangrijk. Catastrofaal zou doorgaande erosie kunnen worden.

Op dit moment wordt de leidraad gevolgd. Dit kan goed aflopen, zolang er geen gevaar is voor doorgaande erosie. Het plezierige van het volgen van de leidraad is, dat op dit moment een formule beschikbaar is voor het opdrijffragment.

### **- ii geen netto debiet naar de spleet**

Indien er genoeg berm lengte aanwezig is, kan er gekozen worden voor een verlenging van de opdrijfzone. Hierdoor wordt de stijghoogte over de verlenging opgetrokken naar de opdrijfdruk. Bijgevolg zal hierdoor extra water uit de (verlengde) spleet naar het massief terugstromen. Er is dan een redelijke kans dat het netto debiet afgeregeld kan worden op nul. Naar alle waarschijnlijkheid zal dit proces voorafgaan aan het openscheuren van de klei.

Via een iteratieprocedure, waarin de opdrijf lengte steeds een stukje verhoogd of verlaagd wordt, kan de hierboven beschreven oplossing worden aangepast. Als dit tot succes voert, is dit een goede

methode om een afschatting te maken van de opdrijf lengte. Maar er zijn ook situaties, waarin deze afregeling zinloos is. Bijvoorbeeld, als de opdrijf druk lager is dan de uittrekwaarde benedenstrooms. De gehele beschikbare berm zal dan opdrijven. Zonder twijfel zal de grond opbarsten.

Er moet dan zeker een discussie gevoerd worden, hoe belangrijk en waarschijnlijk het optreden van onderloopsheid zal zijn.

### - iii alleen debiet naar de spleet

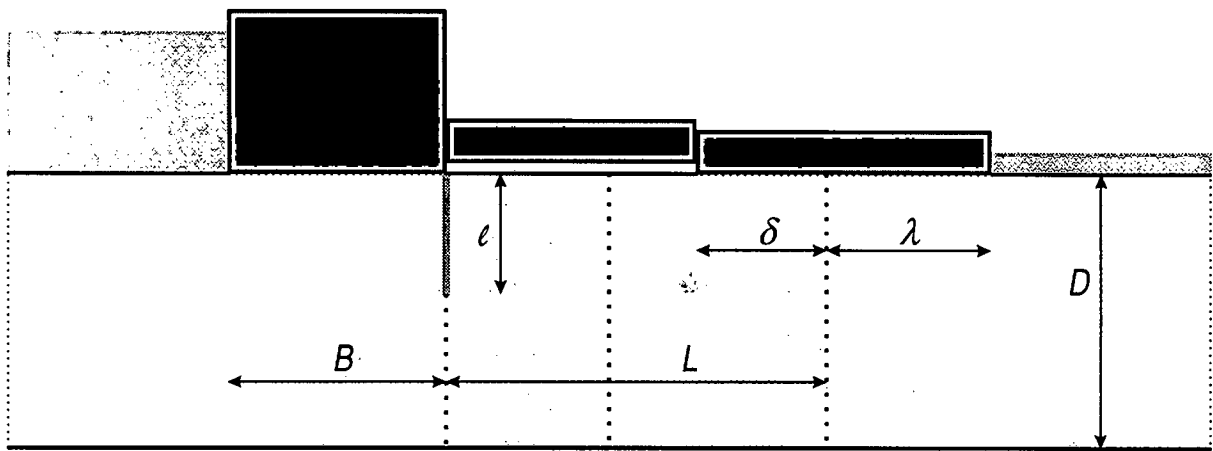
Alleen bij een slecht dijkontwerp zou het voor kunnen komen dat de zwakke plek erin (opdrijfzone) de kwel naar zich toe zou trekken. Kwel hoort afgevoerd te worden naar het veilige achterland. Bij onvoldoende afwateringsmogelijkheden naar het achterland is er de onzekerheid dat het karakter van opdrijven omslaat in onderloopsheid.

Daarnaast is er het geval van een sluis met open kolkvloer, waarin een vaste waterspiegel staat. Deze waterspiegel valt, afgezien van de periode van schutten, samen met binnen- of buitenwater. Hierbij stroomt of alle water de kolkbodem in of uit. Het is zinvol dit te kunnen uitrekenen. De afgeleide formules kunnen hiermee overweg.

De grote overeenkomst tussen zettingsfragmenten en opdrijf fragmenten blijkt uit het feit dat het voorbeeld gegeven in *Figuur 8.3* en *Figuur 8.4* ook gebruikt kan worden voor opdrijven. De sluisvloer moet dan vervangen worden door een kleilaag met een gewicht dat overeenkomt met de druk, die zich heeft ingesteld in de spleet. Het netto debiet naar de spleet is nul.

Er zal nu een voorbeeld gegeven worden, waarin het netto debiet naar de spleet positief is. In *Figuur 8.5* is dit geschetst. Een dijk is ter plaatse van een damwand verjongd. Door de te hoge waterdrukken drijft de berm over een zekere lengte op. We hebben hier te maken met twee typen fragmenten: een kop/staartfragment en een opdrijf fragment. Het gaat ons hier om het gedrag van het laatste. Dit kan echter door het karakter van opdrijven alleen beschouwd worden in de context van het geheel.

In het beschouwde voorbeeld komen geen verspringingen voor. Dit betekent dat de waarde van  $\zeta_N$  in (8.6) reduceert tot nul. Het linker subfragment heeft alleen een damwand; het rechter alleen een



*Figuur 8.5: dijk met opdrijf fragment*

afdichtende kleilaag. In het eerste is  $\zeta_L$  gelijk aan  $1-\mu$ , in het tweede is  $\zeta_M$  gelijk aan  $1-\mu$ . Formules (8.5) en (8.6) en kunnen daarom op compacte wijze worden samengenomen. Voor het linker fragment zijn de formules al vermeld in (8.21). Denk voor het rechter wel even aan [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8.3:

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{K(1-m)}{K(m)} & \frac{D}{L} &= \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \\ m_L &= \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) \middle| 1-\mu \right\}_L & m_R &= \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{\delta}{L} K(\mu) \middle| \mu \right\}_R \\ \frac{Q_L}{K(m)_L} F(\arcsin \sqrt{1-\mu} \middle| m)_L &= \frac{Q_R}{K(m)_R} F\left( \arcsin \left[ \operatorname{dn} \left\{ \frac{L-\delta}{L} K(\mu) \middle| \mu \right\} \right] \middle| m \right)_R \end{aligned} \quad (8.27)$$

In (8.13) gaat de waarde van  $\zeta_K$  naar oneindig. Bij de damwand is  $\zeta_M$  gelijk aan 1 en bij de afdichtende kleilaag is  $\zeta_L$  gelijk aan 1. Ook (8.12) en (8.13) worden een stuk eenvoudiger. Voor het linker fragment zijn de formules al vermeld in (8.22). Voor het rechter gebruiken we [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8.3:

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= \frac{K(1-m)}{K(m)} & \frac{D}{L} &= \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \\ m_L &= \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{\ell}{D} K(1-\mu) \middle| 1-\mu \right\}_L & m_R &= \operatorname{cn}^2 \left\{ \frac{\delta}{L} K(\mu) \middle| \mu \right\}_R \\ \frac{Q_L}{K(m)_L} F(\arcsin \sqrt{1-\mu} \middle| 1-m)_L &= \frac{-Q_R}{K(m)_R} F\left( \arcsin \left[ \operatorname{dn} \left\{ \frac{L-\delta}{L} K(\mu) \middle| \mu \right\} \right] \middle| 1-m \right)_R \end{aligned} \quad (8.28)$$

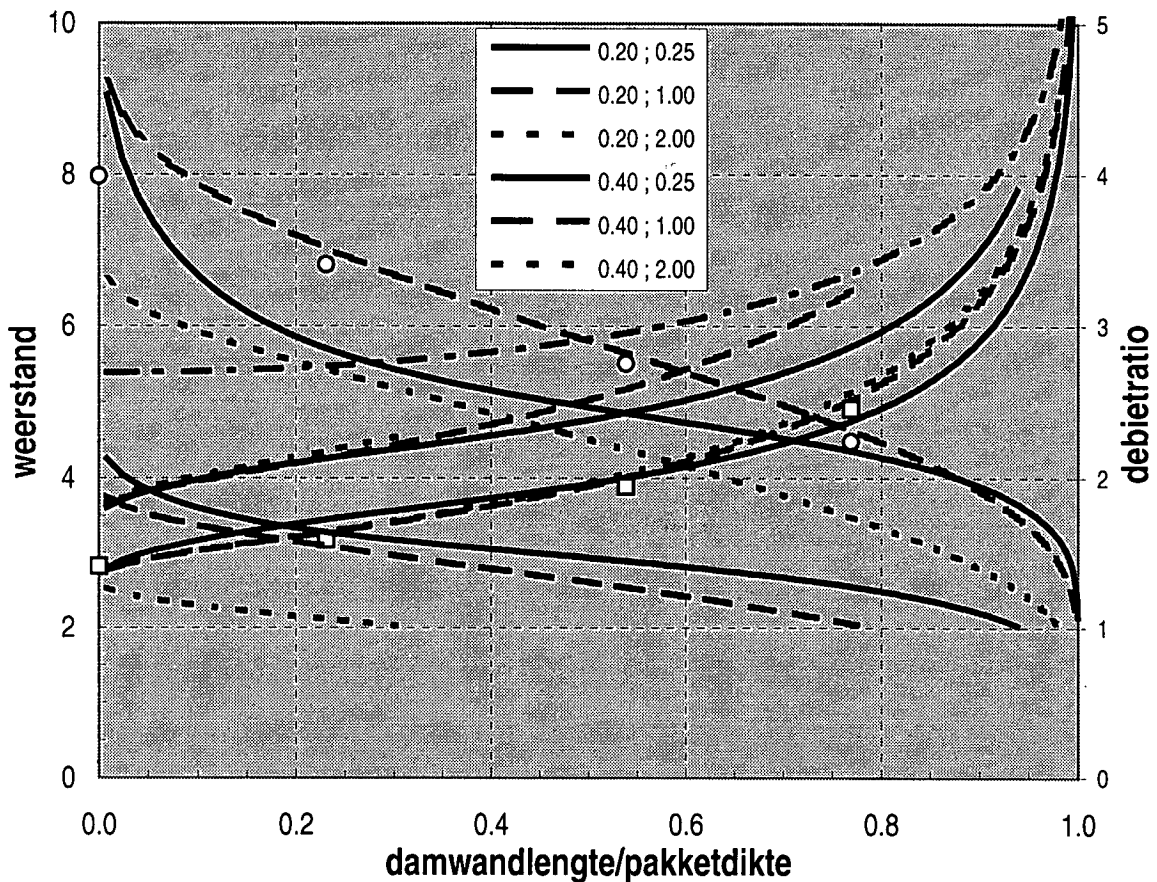
Het benodigde kop/staartfragment wordt overgenomen van (6.4). Bij de dijk is er sprake van zowel een damwand als een voorland. De weerstandsformule hiervoor is:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad m = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \ell}{2D}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi B}{2D}\right)} \quad (8.29)$$

Bij de berm is alleen sprake van een achterland.

Voor een bepaling moet de relatieve positie van de opdrijfdruk gegeven zijn. Dit is gedaan door de druk bovenstrooms op 1 te zetten, benedenstrooms op 0 en de opdrijfdruk er tussenin. Dit zijn alleen genormeerde waarden. De werkelijke mogen een factor hoger zijn en natuurlijk verschoven worden ten opzichte van een referentieniveau.

Twee waarden voor de relatieve opdrijfdruk zijn gevarieerd: 0.2 en 0.4. Voor de opdrijflengte zijn drie waarden gekozen: 0.25, 1.00 en 2.00 maal de pakketdikte. De totale lengte van de berm is 3 maal de pakketdikte; de dijklengte 1.5. De damwandlengte is gevarieerd. In *Figuur 8.6* zijn enkele berekeningsresultaten weergegeven. De monotoon dalende lijnen stellen de debietverhouding voor. De overige zijn totale weerstanden over de constructie. De streep-stiplijn is een referentielijn voor het geval er geen opdrijven plaatsvindt.



*Figuur 8.6: weerstand als functie van de damwandlengte*

Wat opvalt is het feit dat de oplossing nergens neigt naar de oplossing zonder opdrijven. Men zou veronderstellen dat dit voor kleine opdrijf lengten het geval zou moeten zijn. Kennelijk wordt er ook door kleine lengten nog zoveel water aangetrokken en afgevoerd dat dit de weerstandswaarde al snel omlaag trekt.

Niet alle lijnen zijn doorgetrokken over de gehele lengte van de damwand. Alleen in het gepresenteerde deel is het linker debiet groter dan het rechter. Zodra dit omdraait, is er geen sprake meer van opdrijven. Dit gaat een rol spelen bij hogere waarden van de opdrijfdruk. Immers, er treedt dan makkelijker water uit de spleet, dan erin. Voor hogere relatieve opdrijfdrucken dan 0.5 is dit in dit voorbeeld vrijwel overal het geval.

Met behulp van het programma MSEEP zijn er controleberekeningen uitgevoerd om te zien of de gehanteerde methode goede resultaten genereert. Dit is gedaan voor een relatieve opdrijfdruk 0.2 en een relatieve opdrijf lengte 1.00. De weerstand is weergegeven met vierkantjes; de debietverhouding met cirkeltjes. De afwijkingen zijn van de orde 3%.

Voor een zeer korte of ontbrekende damwand is toegepaste fragmentering onbruikbaar. Het probleem is de kortsluiting, die ontstaat in het linker subfragment. Dit soort complicaties is al eerder gerapporteerd in [Sellmeijer 1995]. Als er geen damwand is dan dient men het linker subfragment iets verder door te laten lopen onder de dijk. De verschillen tussen MSEEP en de fragmentenmethode voor

het geval zonder damwand hebben dus niets te maken met het goed functioneren van het toegepaste fragment. Een betere modellering is daar vereist.



## 9 Casestudies

Het ligt in de bedoeling om de in dit rapport afgeleide fragmenten toe te passen op vier casestudies. Deze zijn aangegeven in het projectplan. Twee gevallen betreffen een rivierdijk. Het eerste met opdrijvend achterland, het tweede zonder. Twee andere gevallen zijn betrokken op een sluis. Een met een dichte kolkvloer en een met een open kolkvloer.

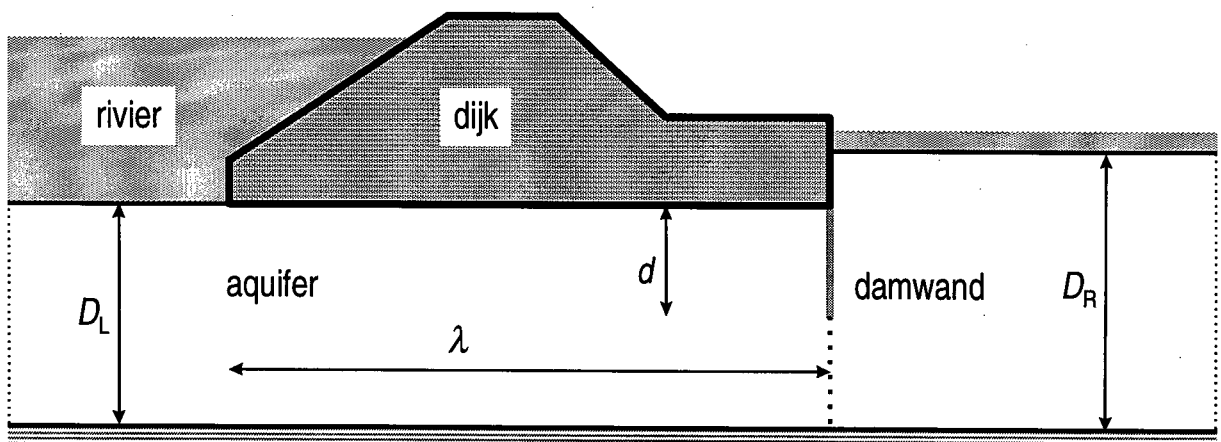
Voor deze casestudies zal hier de weerstandsformule expliciet vermeld worden. Bovendien zal de geometrie verwerkt worden in de elliptische parameters. In fase vier van deze studie kunnen de hier vermelde betrekkingen dan worden overgenomen en toegepast. De vier case studies zullen achtereenvolgens worden behandeld.

### - I Rivierdijk zonder berm achter de damwand

Als eerste wordt behandeld de rivierdijk zonder berm achter de damwand. In *Figuur 9.1* is dit geschetst. De dijk scheidt de rivier van het achterland. Kwel treedt op onder de dijk door. Om deze kwel te verminderen is een damwand aangebracht. De aquifer is ter plaatse van de rivier minder dik dan in het achterland. Deze casestudie is geschikt om de invloed van een gat in de damwand of lek door de damwand te bestuderen.

In de geometrie behoeven slechts twee fragmenten beschouwd te worden, een linker en rechter fragment. Het linker is een halfoneindige strip tot aan het vlak door de damwand; het rechter een halfoneindige strip vanaf het vlak door de damwand. Deze fragmenten zijn in eerdere studies kop- en staartfragment genoemd.

Het faalmechanisme in deze rivierdijk is het gevaar van heave langs de damwand. Heave is het optillen van een element grond door de stromingsdrukken. Het gewicht van zo'n element grond per eenheid van oppervlak is gelijk aan de hoogte ervan maal het soortelijk gewicht. Een maat voor het mogelijk optreden van heave is dus het verhang over het beschouwde element. Dit verhang wordt  $i$  genoemd en



*Figuur 9.1: voorbeeld invloed van gat op de weerstand*

is gelijk aan het stijghoogteverschil over het element gedeeld door de hoogte ervan. Het maximaal optredende verhang is maatgevend.

In formule (2.2) is de relatie aangegeven tussen dit verhang en de weerstanden van de toegepaste fragmenten. Voor het hier beschouwde geval is het verhang over de gehele damwand maatgevend en geldt, als  $h$  het verval over de dijk is:

$$i = \frac{h}{D_R - D_L + d} \frac{W_R}{W_L + W_R} \quad (9.1)$$

De rechter damwandlengte is samengesteld uit de maten gegeven in *Figuur 9.1*.

In hoofdstuk 7, Gat- en Lekfragment, zijn de weerstanden al in detail uitgewerkt. Voorbeelden van rekenresultaten zijn gegeven in *Figuur 7.3* voor een gat in de damwand en in *Figuur 7.4* voor lek door de damwand. De achterliggende formules zullen worden samengevat en uitgeschreven voor drie toestanden: ten eerste het geval van een ondoorlatende damwand zonder gat; ten tweede het geval van een ondoorlatende damwand met gat; ten derde het geval van een half-lekke damwand zonder gat.

#### - i geen gat, geen lek

De weerstandsformule wordt overgenomen van (7.5), waarin de bronlek, die een gat of lek simuleert, op nul gezet wordt. De waarde van de parameter berust op de geometrie van het probleem en wordt gehaald uit *Tabel 7.2*:

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{K(1-m_L)}{K(m_L)} & m_L &= \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{d}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}} \\ W_R &= \frac{K(1-m_R)}{K(m_R)} & m_R &= \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - d}{D_R} \right\} \end{aligned} \quad (9.2)$$

Hierbij is de weerstand gesplitst in een bijdrage van het linker en rechter fragment. Het verhang over de gehele damwand is maatgevend, zodat (9.1) toepasbaar is. Met behulp van (9.2) is het verhang (9.1) gespecificeerd.

#### - ii alleen gat, geen lek

Een gat wordt gesimuleerd door een bron. Het brondebiet in (7.5) moet hier dus wel worden meegenomen. Naast de parameter  $m$  is nu ook de karakteristiek  $n$ , die de positie van de bron weergeeft, nodig. Beide zijn gespecificeerd in *Tabel 7.2*. Er geldt:

$$\begin{aligned} W_L &= \frac{K(1-m_L)}{K(m_L)} - \frac{\delta Q}{Q} \frac{V(1/n_L; m_L)}{K(m_L)} & m_L &= \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{d}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}} & n_L &= \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{r}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}} \\ W_R &= \frac{K(1-m_R)}{K(m_R)} - \frac{\delta Q}{Q} \frac{V(1/n_R; m_R)}{K(m_R)} & m_R &= \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - d}{D_R} \right\} & n_R &= \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - r}{D_R} \right\} \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$V(w; m) = F \left( \arcsin \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \mid 1-m \right)$$

Het gat is gepositioneerd tegen de onderkant van de dijk. De veronderstelling is dat de damwand niet goed aansluit op de dijk. Daarom ligt de bron op de halve gatbreedte  $r$  van de bovenrand.

In (9.3) moet het brondebiet nog worden gespecificeerd. Dit is vermeld in (7.3), waarin de hulpfunctie  $G$  gedefinieerd is in (7.1):

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{1}{G(w_G, n; m)_L + G(w_G, n; m)_R} \left\{ \frac{V(w_G; m)_L}{K(m)_L} + \frac{V(w_G; m)_R}{K(m)_R} \right\}$$

$$w_{GL} = \cosh^2 \left\{ \frac{\pi \lambda}{2 D_L} \right\} \quad m_L = \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi d}{2 D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi \lambda}{2 D_L} \right\}} \quad n_L = \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi r}{2 D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi \lambda}{2 D_L} \right\}}$$

$$w_{GR} = \csc^2 \left\{ \frac{\pi D_L}{2 D_R} \right\} \quad m_R = \sin^2 \left\{ \frac{\pi D_L - d}{2 D_R} \right\} \quad n_R = \sin^2 \left\{ \frac{\pi D_L - r}{2 D_R} \right\}$$
(9.4)

$$G = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \coth \sqrt{\frac{1-n}{w_G-1} \frac{1-mw_G}{n-m} \frac{1}{nw_G}} + \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\Theta[V(w_G; m) + V(1/n; m)](1-m)}{\Theta[V(w_G; m) - V(1/n; m)](1-m)} \right\} +$$

$$+ \frac{V(1/n; m)}{K(1-m)} \frac{V(w_G; m)}{K(m)} \quad V(w; m) = F \left( \arcsin \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \mid 1-m \right)$$

Voor de duidelijkheid zijn de uitdrukkingen voor de parameter en de karakteristiek en ook de hulpfunctie  $V$  uit (9.3) herhaald.

Omdat via het gat kwel geconcentreerd wordt afgevoerd, ontstaat er op het potentiaalverloop langs de damwand een hobbel. Op voorhand is niet duidelijk wat het maatgevend verhang zal worden. Bij gelijkmatige stroming is dit het potentiaalverschil over de hele damwand, zoals verwerkt is in (9.1). Bij een relatief groot gat ligt het potentiaalverschil over het deel tussen maaiveld en gat meer voor de hand. Met behulp van (7.2) is de laatste grootheid bepaald. Het maximum van de twee volgende verhangen zal dus moeten worden bepaald:

$$i_{\text{teen}} = \frac{h}{D_R - D_L + d} \frac{W_R}{W_L + W_R}$$

$$i_{\text{gat}} = \frac{h}{D_R - D_L} \frac{W_R + \frac{\delta Q}{Q} G(w_G, n; m)_R - \frac{V(w_G; m)_R}{K(m)_R}}{W_L + W_R}$$
(9.5)

De weerstand in de teller geeft de potentiaalval aan. Deze is aangepast aan de waarde in het gat. Tegelijkertijd moet de lengte waarover de potentiaalval plaatsheeft juist worden gekozen. De maximale waarde in (9.5) is maatgevend.

Een beoordeling van de waarde van de gehanteerde formule voor het verhang is op zijn plaats. De formule vertegenwoordigt de opdrijvende waterspanning op een kolom grond op een correcte wijze. Echter, de invloed van schuifspanningen op de zijvlakken wordt geheel genegeerd. Het is niet eenvoudig om een betrouwbare maat te definiëren voor deze schuifspanningen. Zij werken de heaving tegen en spelen bij een ideale damwand (geen gat en geen lek) een ondergeschikte rol. Daarom laat men ze weg en kwalificeert het resultaat als conservatief.

De stromingsdruk bij een gat zal aan de benedenstroomse zijde hoger uitvallen dan zonder gat het geval is. Immers, de druk richt zich door het gat heen naar de hogere drukken aan de andere zijde. Dit is verwoord in de onderste formule van (9.5). Voor een gat van enige omvang is dit een goede, conservatieve, benadering. Echter, ook als het gat infinitesimaal klein is, vindt de drukaanpassing plaats. Maar de rest van het veld zal daar niet veel van merken.

Dit betekent dat voor gaten van minieme omvang een te conservatief resultaat gehanteerd wordt. De overdrijving is dan van een orde van grootte van 2. Voor een gat van enige importantie neemt deze overdrijving snel af.

### - iii geen gat, alleen lek

Als de damwand een zekere mate van doorlatendheid vertoont, kan dit worden opgevat als lek via een serie gaatjes. Dit betekent dat (9.3) voor zo'n damwand kan worden overgenomen, mits de bijdrage van al die gaatjes netjes gesommeerd (geïntegreerd) wordt over het gemeenschappelijke deel van de damwand. Voor zo'n integratie kan een standaard numerieke methode gekozen worden. Het liefst een, die redelijk snel is met het oog op het grote aantal berekeningen via een probabilistisch algoritme.

Aangepast via (7.10) luidt (9.3):

$$W_L = \frac{K(1-m_L)}{K(m_L)} - \int_{\text{damwand}} \frac{\delta q}{Q} \frac{V(1/n_L; m_L)}{K(m_L)} d\eta \quad m_L = \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{d}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}} \quad n_L = \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{y}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}}$$

$$W_R = \frac{K(1-m_R)}{K(m_R)} - \int_{\text{damwand}} \frac{\delta q}{Q} \frac{V(1/n_R; m_R)}{K(m_R)} d\eta \quad m_R = \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - d}{D_R} \right\} \quad n_R = \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - \eta}{D_R} \right\} \quad (9.6)$$

$$V(w; m) = F \left( \arcsin \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \mid 1-m \right)$$

De positie van de bron is gelieerd aan de plaats  $\eta$  op de damwand. De uitdrukking voor het brondebiet wordt gevonden in (7.9). Deze wordt hier overgenomen en uitgebreid met de informatie vermeld in (9.4):

$$\frac{k}{k'} t \frac{\delta q}{Q} + \int_{\text{damwand}} \frac{\delta q}{Q} \{ G(w_G; n; m)_L + G(w_G; n; m)_R \} d\eta = \frac{V(w_G; m)_L}{K(m)_L} + \frac{V(w_G; m)_R}{K(m)_R}$$

$$w_{GL} = \frac{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}}{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{y}{D_L} \right\}} \quad m_L = \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{d}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}} \quad n_L = \frac{\cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\eta}{D_L} \right\}}{\cosh^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{D_L} \right\}}$$

$$w_{GR} = \csc^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - y}{D_R} \right\} \quad m_R = \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - d}{D_R} \right\} \quad n_R = \sin^2 \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{D_L - \eta}{D_R} \right\} \quad (9.7)$$

$$G = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccoth} \sqrt{\frac{1-n}{w_G-1} \frac{1-mw_G}{n-m} \frac{1}{nw_G}} + \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\Theta[V(w_G; m) + V(1/n; m) \mid 1-m]}{\Theta[V(w_G; m) - V(1/n; m) \mid 1-m]} \right\} +$$

$$+ \frac{V(1/n; m) V(w_G; m)}{K(1-m) K(m)} \quad V(w; m) = F \left( \arcsin \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \mid 1-m \right)$$

Dit is een voorwaarde die geldt in iedere positie  $y$  op de damwand. Met behulp van deze voorwaarde wordt de verdeling van het brondebiet over de hoogte van de damwand vastgelegd. Let op de analogie in de formules voor  $w_G$  en  $1/n$ .

De conditie om het brondebiet te bepalen is een integraalvergelijking. Deze kan het makkelijkst worden aangepakt door de bronnen te discretiseren. Aldus ontstaat een matrixvergelijking. Deze kan met behulp van een solver worden uitgewerkt.

De lek is veel minder geconcentreerd dan een gat. In de potentiaallijn ontstaat nu geen hobbel, maar een insnoering. Deze is maximaal iets onder de constructievloer. Analoog aan (9.5) wordt het maatgevend verhang in twee maten opgesteld. Over de hele damwand en naar de insnoering. Er geldt:

$$i_{\text{teen}} = \frac{h}{D_R - D_L + d} \frac{W_R}{W_L + W_R} \quad (9.8)$$

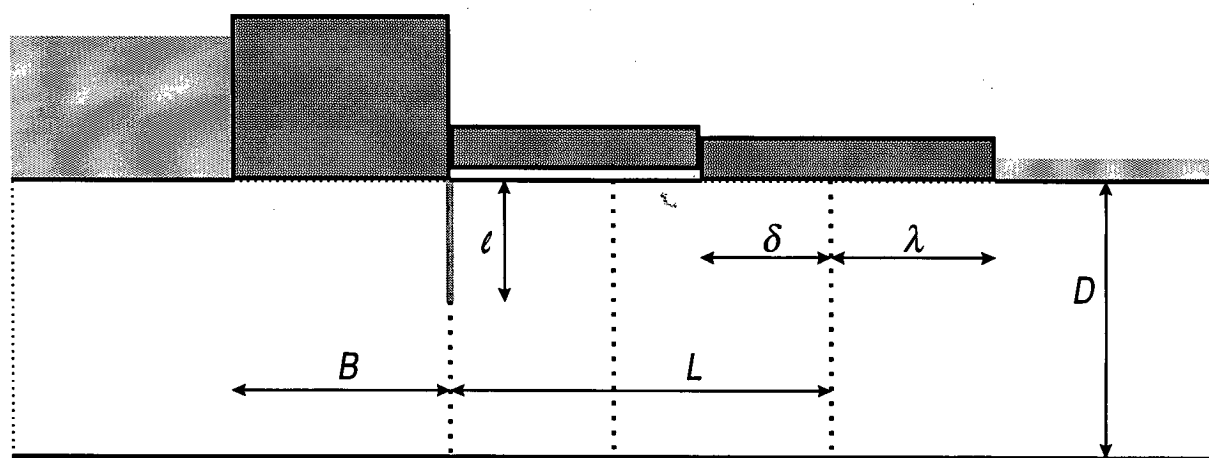
$$i_{\text{lek}} = \frac{h}{D_R - D_L + y} \frac{W_R + \int_{\text{damwand}} \frac{\partial Q}{\partial \eta} G(w, n; m)_R d\eta - \frac{v(w; m)_R}{K(m)_R}}{W_L + W_R}$$

Bij het gat mocht voor  $y$  de waarde 0 gehanteerd worden. Nu moet een zodanige  $y$  gekozen worden dat de gradiënt een lokaal maximum vertoont. Dit volgt snel door de discrete waarden langs te lopen.

## - II Rivierdijk met opdrijvend achterland

Een rivier met opdrijvend achterland is al behandeld als voorbeeld om opdrijven te illustreren. In *Figuur 8.5* is de geometrie gepresenteerd. Deze is gekopieerd naar *Figuur 9.2* onderaan de bladzijde. Bij opdrijven komt het begrip weerstand een beetje op de tocht te staan. Dit komt door het weglekken van debiet naar de opdrijfzone. Er is sprake van een bovenstrooms debiet en een benedenstrooms debiet. Om deze vast te leggen worden eerst de potentialen uitgeschreven.

In (8.26) is een uitdrukking gegeven voor de potentiaalval over een constructie. Deze wordt hier herhaald:



*Figuur 9.2: dijk met opdrijfsegment*

$$\begin{aligned}
P_b - P_s &= Q_\Psi \frac{F(\vartheta | m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi + \sum_n^{\text{boven strooms}} W_n \right\} + Q_\Phi \frac{F(\vartheta | 1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi + \sum_n^{\text{boven strooms}} W_n \right\} \\
P_s - P_o &= Q_\Psi \frac{F(\vartheta | m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi + \sum_n^{\text{beneden strooms}} W_n \right\} - Q_\Phi \frac{F(\vartheta | 1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi \left\{ \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi + \sum_n^{\text{beneden strooms}} W_n \right\}
\end{aligned} \quad (9.9)$$

De bovenste relatie geldt voor het verschil tussen de bovenstroomse rand en de spleet; de onderste voor het verschil tussen de spleet en de benedenstroomse rand. De corresponderende debieten zijn bepaald door de nog onbekende kentallen  $Q_\Phi$  en  $Q_\Psi$ . Deze zijn direct bepaald door de twee bovenstaande relaties.

De relaties bevatten een bovenstroomse som van weerstanden en een benedenstroomse som. Het opdrijffragment is hierbij gesplitst in een linker en rechter deel, die bovendien beide nog van twee typen kunnen zijn: één met als scheidingslijn een potentiaallijn en één met als scheidingslijn een stroomlijn. Er zijn dan ook vier typen, die uit elkaar gehouden worden via de bovenschrijft  $\Phi$  en  $\Psi$  en de onderschriften  $L$  en  $R$ .

De diverse benodigde grootheden voor de verdere uitwerking van (9.9) kunnen worden gehaald uit (8.27), die geldt voor het bovenschrijft  $\Psi$ , en (8.28), die geldt voor het bovenschrijft  $\Phi$ . Zij worden zodanig uitgeschreven dat directe invulling in (9.9) mogelijk is. Voor het open fragment geldt:

$$\begin{aligned}
m_L^\Psi &= \text{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\}_L & \vartheta_L^\Psi &= \arcsin \sqrt{1-\mu_L} & \frac{D}{L_L} &= \frac{K(1-\mu)_L}{K(\mu)_L} \\
m_R^\Psi &= \text{dn}^2 \left\{ \frac{\delta}{L} K(\mu) | \mu \right\}_R & \vartheta_R^\Psi &= \arcsin \left[ \text{dn} \left\{ \frac{L-\delta}{L} K(\mu) | \mu \right\} \right]_R & \frac{D}{L_R} &= \frac{K(1-\mu)_R}{K(\mu)_R}
\end{aligned} \quad (9.10)$$

Voor het gesloten fragment geldt:

$$\begin{aligned}
m_L^\Phi &= \text{cn}^2 \left\{ \frac{\ell}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\}_L & \vartheta_L^\Phi &= \arcsin \sqrt{1-\mu_L} & \frac{D}{L_L} &= \frac{K(1-\mu)_L}{K(\mu)_L} \\
m_R^\Phi &= \text{cn}^2 \left\{ \frac{\delta}{L} K(\mu) | \mu \right\}_R & \vartheta_R^\Phi &= \arcsin \left[ \text{dn} \left\{ \frac{L-\delta}{L} K(\mu) | \mu \right\} \right]_R & \frac{D}{L_R} &= \frac{K(1-\mu)_R}{K(\mu)_R}
\end{aligned} \quad (9.11)$$

Via (9.9), (9.10) en (9.11) is er genoeg informatie om de grootheden  $Q_\Phi$  en  $Q_\Psi$  uit te rekenen. De werkelijke debieten volgen dan met behulp van (8.15):

$$Q_L = Q_\Psi \frac{F(\vartheta | m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi + Q_\Phi \frac{F(\vartheta | 1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi \quad Q_R = Q_\Psi \frac{F(\vartheta | m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi - Q_\Phi \frac{F(\vartheta | 1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi \quad (9.12)$$

Deze algemene formulering passen we nu toe op het speciale geval van *Figuur 9.2*. Er is slechts één bovenstrooms fragment en slechts één benedenstrooms fragment. Beide zijn van het type kop- of staartfragment. De formulering van de weerstand hiervoor wordt nog een keer herhaald uit (8.29):

$$W = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad m = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi \ell}{2D}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi b}{2D}\right)} \quad (9.13)$$

De parameter hierin wordt beïnvloed door de constructielengte en de damwandlengte. Aan de benedenstroomse zijde is alleen een berm en geen damwand.

Het opdrijffragment bevindt zich onder de opdrijfzone en strekt zich uit van damwand tot midden onder de niet opgedreven berm. In principe is de rechter rand arbitrair, mits de stroming er maar redelijk horizontaal is. Dit is redelijk het geval in het midden van de niet opgedreven berm. De scheiding van de subfragmenten wordt gekozen op het midden van de opgedreven zone. Dit betekent dat de lengte van het linker subfragment gesteld wordt op  $L_L = (L-\delta)/2$  en dat van het rechter op  $L_R = (L+\delta)/2$ , zie *Figuur 9.2*.

Het verhang over de damwand bepaalt of heaving hier een rol kan spelen. Omdat de berm opgedreven is kan het zand in principe omhooggetild worden. De gradiënt over de damwand volgt uit de eerste vergelijking van (8.16):

$$kl\ i = P_L - P_S = Q_\Psi \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi + Q_\Phi \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi \quad (9.14)$$

Het lijkt erop alsof er een extra parameter (doorlatendheid) in de berekening moet worden meegenomen. Dit is slechts schijn. Om in de geest van weerstanden te werken, is in de notatie een potentiaal gebruikt en niet een stijghoogte. Omdat de in-situ gegevens in stijghoogten worden aangeleverd, valt de doorlatendheid uit de berekening weg.

### - III Sluis met dichte kolkvloer

De stroming onder een sluis met dichte kolkvloer lijkt heel sterk op de stroming zoals die optreedt bij opdrijven. Echter, er is een essentieel verschil. De druk onder de sluisvloer stelt zich in op de voorwaarde dat er een netto debiet nul is naar de spleet onder de sluisvloer. Bij opdrijven was de druk op voorhand bekend. Het netto debiet naar de opdrijfzone stelt zich hierop in.

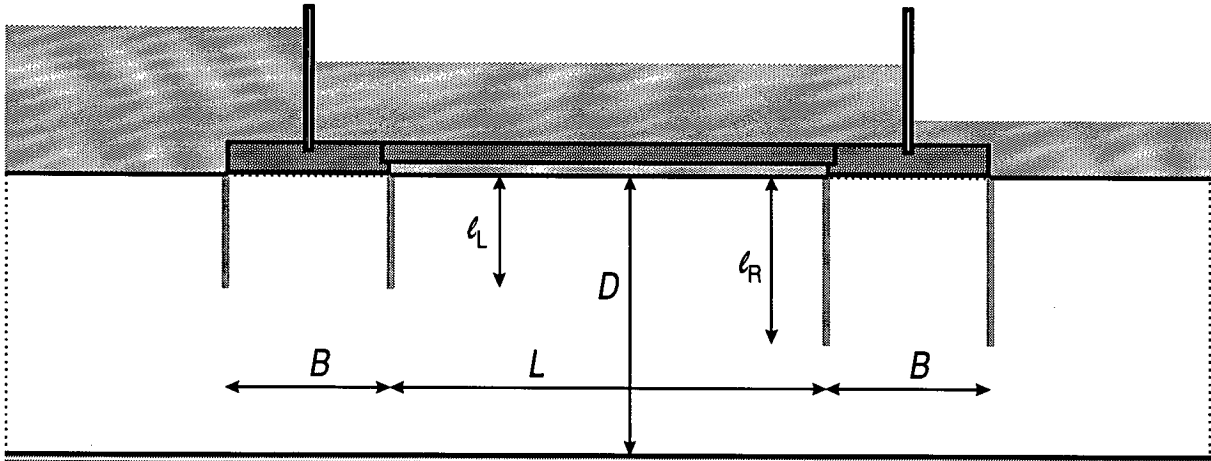
Het grote voordeel van continuïteit van debiet (netto debiet naar de spleet nul) is het feit dat het zakkingsfragment integer is. De weerstand kan zonder problemen geschakeld worden in het grotere geheel. Bij het opdrijffragment kon dit niet en moesten er twee volledige schakels, bovenstrooms en benedenstrooms, met elkaar in evenwicht gebracht worden.

Voor het opstellen van de weerstand kan er direct gebruik gemaakt worden van (8.16). Hierin is de potentiaal in de spleet nog niet bekend. De vergelijkingen worden gedeeld door het debiet  $Q$  om te kunnen werken met weerstanden:

$$W_L = \frac{P_L - P_S}{Q} = \frac{Q_\Psi}{Q} \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi + \frac{Q_\Phi}{Q} \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_L \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi$$

$$W_R = \frac{P_S - P_R}{Q} = \frac{Q_\Psi}{Q} \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi - \frac{Q_\Phi}{Q} \frac{K(1-m)}{K(m)} \Big|_R \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi \quad (9.15)$$

De debietsterkten zijn bepaald in (8.19) en (8.18). Beide worden volledig uitgeschreven:



Figuur 9.3: sluis met dichte kolkvloer

$$\frac{Q_\Phi}{Q} \left\{ \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi + \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi \right\} = \left\{ \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi - \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi \right\} \quad (9.16)$$

$$\frac{Q_\Psi}{Q} \left\{ \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_L^\Psi + \frac{F(\vartheta|m)}{K(m)} \Big|_R^\Psi \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi \right\} = \left\{ \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_R^\Phi + \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \Big|_L^\Phi \right\}$$

Als voorbeeld is de geometrie van *Figuur 8.3* gekozen, die opnieuw is weergegeven in *Figuur 9.3*. De beide hoofden zijn even lang, maar hun lengten van de damwanden ter weerszijden zijn verschillend. Het zakkingsfragment bevindt zich recht onder de sluisvloer, afgebakend door de binnendamwanden van de hoofden. Het wordt opgedeeld in twee gelijke subfragmenten.

Net als in het geval van opdrijven bevat het zakkingsfragment twee klassen van oplossingen: één met als scheidingslijn een potentiaallijn en één met als scheidingslijn een stroomlijn. Omdat er twee subfragmenten zijn worden er wederom vier typen grootheden beschouwd via de bovenschriften  $\Phi$  en  $\Psi$  en de onderschriften  $L$  en  $R$ .

De diverse benodigde grootheden voor de verdere uitwerking van (9.15) en (9.16) kunnen worden gehaald uit (8.21), die geldt voor het bovenschrift  $\Psi$ , en (8.22), die geldt voor het bovenschrift  $\Phi$ . Zij worden zodanig uitgeschreven dat directe invulling in de formules mogelijk is. Voor het open fragment geldt:

$$m_L^\Psi = \text{sn}^2 \left\{ \frac{D-l_L}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad \vartheta_L^\Psi = \arcsin \sqrt{1-\mu} \quad \frac{D}{\frac{1}{2}L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad (9.17)$$

$$m_L^\Psi = \text{sn}^2 \left\{ \frac{D-l_R}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad \vartheta_R^\Psi = \arcsin \sqrt{1-\mu} \quad \frac{D}{\frac{1}{2}L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)}$$

Voor het gesloten fragment geldt:



$$\begin{aligned}
 m_L^\Phi &= \text{cn}^2 \left\{ \frac{\ell_L}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} & \vartheta_L^\Phi &= \arcsin \sqrt{1-\mu} & \frac{D}{\frac{1}{2}L} &= \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \\
 m_R^\Phi &= \text{cn}^2 \left\{ \frac{\ell_R}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} & \vartheta_R^\Phi &= \arcsin \sqrt{1-\mu} & \frac{D}{\frac{1}{2}L} &= \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)}
 \end{aligned} \quad (9.18)$$

Door de symmetrie van de subfragmenten blijken alle vier de amplitudes gelijk te zijn. Omdat de binnendamwanden ongelijk van lengte zijn en open en gesloten type tot uiting komen in de parameter  $m$ , zijn de parameterwaarden alle verschillend.

Behalve zettingsfragment spelen kop/staartfragment en tussenfragment in de beschouwde configuratie een rol. Om volledig te zijn worden de weerstandformules hiervoor nog een keer herhaald. Voor het tussenfragment geldt volgens (8.23):

$$W = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad \sqrt{\frac{m}{1-\mu}} = \text{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad \frac{D}{B} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad (9.19)$$

Het kop/staartfragment wordt overgenomen van (8.24):

$$W = \frac{K(1-m)}{K(m)} \quad m = \cos^2 \left( \frac{\pi \ell}{2 D} \right) \quad (9.20)$$

Nu alle weerstanden zijn gespecificeerd, ligt het verhang over de damwanden vast. Dit verhang wordt uitgeschreven met behulp van (2.2):

$$i_n = \frac{h}{\ell} \frac{W_n}{\sum_{n=1}^N W_n} \quad (9.21)$$

Deze formule geldt voor alle damwanden.  $h$  is het verval over de constructie,  $\ell$  de lengte van de damwand. In de rechter noemer staat de som van alle samenstellende weerstanden; in de rechter teller de weerstand over het fragment met damwand.

Kunstwerken worden vaak ontworpen met behulp van de formule van Lane. Deze stelt dat de te keren waterhoogte afgeschat kan worden aan de som van verticale en horizontale leklengte. Vanwege het mogelijk optreden van een zakkingspleet wordt de horizontale leklengte gereduceerd met een factor 3. Voor de sluis van *Figuur 9.3* komt dit neer op:

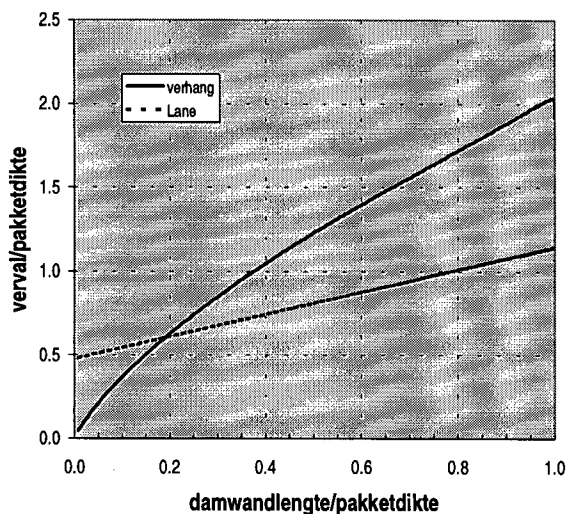
$$h = \frac{4(\ell_L + \ell_R) + \frac{1}{3}(2B + L)}{c} \quad (9.22)$$

Er zijn per hoofd twee damwanden met elk twee zijden. Dit verklaart de factor 4.  $c$  is een evenredigheidsconstante; voor zand wordt hiervoor vaak de waarde 6 gehanteerd. In een deterministische berekening is het gebruikelijk het kritisch verhang over de laatste damwand op 0.5 te stellen. In dat geval kunnen de kerende hoogten van (9.21) en (9.22) direct met elkaar vergeleken worden.

In *Figuur 9.4* zijn beide kerende hoogten uitgezet tegen de lengte van de binnenste damwand voor de geometrie van *Figuur 9.3*. De verhouding tussen vloerlengte en pakketdikte is 4. Dit is zodanig groot dat de spleetwerking belangrijk is. Het mag niet verwacht worden dat de curven boven op elkaar liggen.

Daarvoor zijn de uitgangspunten te verschillend. De heavingmethode kijkt naar het verhang over de laatste damwand om optillen van het zand te voorkomen. Lane richt zijn aandacht op onderloopsheid en maakt gebruik van empirie. Wat orde van grootte betreft zijn de verschillen niet eens zo vreselijk groot. Het gevaar van heaving bij hele korte damwanden is natuurlijk groot, zodat daar slechts marginale vervallen worden toegelaten. Onderloopsheid kan dan grotere vervallen aan. Bij langere damwanden is het gevaar voor heaving weer kleiner.

Als er bij de heaving geen rekening gehouden was met spleetwerking, dan zouden de verschillen veel hoger zijn opgelopen. Het meenemen van spleetwerking komt dus tegemoet aan de uitgangspunten van Lane. Het is duidelijk een verbetering van de ontwerpaanpak.



Figuur 9.4: kerende hoogte vergeleken met Lane

#### - IV Sluis met open kolkvloer

Bij een sluis, zoals geschetst in *Figuur 9.3*, is de kolkvloer niet altijd aanwezig. Dit is van belang voor de stroming. Bij een sluis met dichte kolkvloer ontstaat er in de spleet eronder een druk, die bepaald is door de voorwaarde van een netto debiet nul naar de spleet. Bij een sluis met open kolkvloer geldt de op dat moment heersende druk in de kolk.

In principe beïnvloeden de beide sluishoofden elkaars stromingspatroon. Maar als de kolkvloer relatief lang is, dan is dat effect gering. Daarom wordt alleen één sluishoofd in de berekening beschouwd. De benodigde weerstanden hiervoor zijn vermeld in (9.19) en (9.20).

## 10 Numerieke bepaling Elliptische Functies

In dit rapport is met succes een instrumentarium uitgewerkt voor het bepalen van weerstanden in fragmenten. Dit instrumentarium is geheel gedefinieerd in een speciaal type wiskundige functies: elliptische integralen en Jacobijnse elliptische functies. Hiermee kan een grote verscheidenheid aan geometrische randvoorwaarden worden beschreven. De elliptische functieruimte is zeer consistent en gedetailleerd. Er is een uitdrukking voor iedere gewenste grootte.

Een wiskundige uitwerking van een probleem is weliswaar van groot belang, maar uiteindelijk gaat het toch om de vertaling in getallen. De vraag, die dus aan de orde is, betreft het gemak om de elliptische functieruimte om te zetten naar getallen. Hiertoe staan een aantal benaderingen open.

Door middel van oplopende of aflopende Landen transformaties kan men de parameter zo dicht als gewenst laten naderen tot 1 of 0. Voor een dergelijke parameter gedraagt de elliptische functie zich als bekendere cirkel- of hyperbolische functies. Daarnaast is er voor de Jacobijnse elliptische functies een scala aan reeksontwikkelingen in de zogenaamde 'nome'.

Er bestaat ook een geheel andere methode om getallen te genereren: het proces van het aritmetisch-geometrisch gemiddelde. Deze aanpak is elegant, snel en uiterst precies. De benodigde numerieke methoden zullen we hierop baseren.

Het proces van het aritmetisch-geometrisch gemiddelde is aangegeven in [Abramowitz, Stegun 1968], 17.6 en 16.4. Hierbij worden enkele reeksen gevormd van een parametergroep  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en de amplitude. Dit wordt op de volgende wijze uitgevoerd:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_0 & b_0 & c_0 & \varphi_0 & \frac{\sin(2\varphi_0 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_1)} = \frac{c_1}{a_1} & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} & \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} & \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} & \frac{\tan(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{\tan(\varphi_{n-1})} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} & \frac{\sin(2\varphi_n - \varphi_{n+1})}{\sin(\varphi_{n+1})} = \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}} & (10.1) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2} & \sqrt{a_{N-1} b_{N-1}} & \frac{a_{N-1} - b_{N-1}}{2} & \frac{\tan(\varphi_N - \varphi_{N-1})}{\tan(\varphi_{N-1})} = \frac{b_{N-1}}{a_{N-1}} & \varphi_N & 
 \end{array}$$

Er wordt gestart met  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \sqrt{1-m}$ ,  $c_0 = \sqrt{m}$  voor de gewone elliptische functies; met  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \sqrt{m}$ ,  $c_0 = \sqrt{1-m}$  voor de complementaire. Voor elke waarde  $m \neq 0$  en  $m \neq 1$  leidt dit al vrij snel tot  $a_N \sim b_N$  of  $c_N \sim 0$ . Machinenauwkeurigheid van de computer wordt hierbij gemakkelijk gehaald.

Uitwerking van de reeksen in (10.1) is voldoende om vrijwel de gehele elliptische ruimte vast te leggen. In ieder geval de functies die nodig zijn om de fragmenten mee vast te leggen. Voor de gewone elliptische functies zal dit worden toegelicht. De complementaire gaan analoog, waarbij de complementaire parametergroep wordt aangewend.

Elliptische integralen van de eerste soort zijn aangegeven in [Abramowitz, Stegun 1968], 17.6.3 en 17.6.9. Zij luiden:

$$K(m) = \frac{\pi}{2a_N} \quad \frac{F(\varphi|m)}{K(m)} = \frac{2\varphi_N}{\pi 2^N} \quad (10.2)$$

Hierbij wordt de vierde kolom van (10.1) aangewend. Natuurlijk kan de onvolledige integraal van de eerste soort ook expliciet worden opgeschreven. Echter, het quotiënt van onvolledig en volledig komt bij de beschrijving van de fragmenten frequent voor. Het heeft voordelen deze combinatie uit te rekenen.

Op dit moment is een waarschuwing op zijn plaats. Het onbekommerd doorrekenen van de vierde kolom van (10.1) loopt verkeerd af. Dit komt omdat een computer een tangens altijd interpreteert op het traject  $-\pi/2 - \pi/2$ . Daarom dient de vierde kolom omgewerkt te worden tot:

$$\tan(\varphi_n - 2\varphi_{n-1}) = \frac{\tan(\varphi_n - \varphi_{n-1}) - \tan(\varphi_{n-1})}{1 + \tan(\varphi_n - \varphi_{n-1})\tan(\varphi_{n-1})} = -\frac{(a_{n-1} - b_{n-1})\tan(\varphi_{n-1})}{a_{n-1} + b_{n-1}\tan^2(\varphi_{n-1})} \quad (10.3)$$

Hiermee zijn de integralen, die in deze studie nodig zijn, in kaart gebracht.

De elliptische functies zijn vermeld in [Abramowitz, Stegun 1968], 16.4. Daar wordt de andere kant uitgewerkt met behulp van de vijfde kolom in (10.1). Begonnen wordt met een waarde voor  $\varphi_N$ , waaruit dan  $\varphi_0$  volgt. Er geldt:

$$\varphi_N = \frac{\pi}{2} 2^N u \quad \begin{aligned} \operatorname{sn}\{u K(m)|m\} &= \sin(\varphi_0) \\ \operatorname{cn}\{u K(m)|m\} &= \cos(\varphi_0) \\ \operatorname{dn}\{u K(m)|m\} &= \sqrt{1 - m \sin^2(\varphi_0)} \end{aligned} \quad (10.4)$$

Ook hier is het werken met een geschaald argument  $u K(m)$  in plaats van  $u$  alleen aan te bevelen. Bij  $\operatorname{dn}$  is de oorspronkelijke definitie gebruikt in plaats van de uitdrukking onder 16.4.4. Dit is gedaan omdat 16.4.4 minder betrouwbaar is voor amplitudes in de buurt van  $\pi/2$ . Dit zou heel incidenteel wel eens kunnen optreden.

Naast de Jacobijnse elliptische functies is de Jacobijnse theta-functie interessant. Deze staat uitgeschreven in [Abramowitz, Stegun 1968], 16.32 en luidt:

$$\ln[\Theta\{u K(m)|m\}] = \frac{1}{2} \ln\left\{\frac{2}{\pi} \sqrt{1-m} K(m)\right\} - \frac{1}{4} \ln\{1 - m \sin^2 \varphi_0\} - \sum_{n=1}^N 2^{-n-1} \ln\{\cos(2\varphi_{n-1} - \varphi_n)\} \quad (10.5)$$

Merk op dat in de tweede term van het rechter lid van de onderste vergelijking dezelfde voorzorgsmaatregel getroffen is als bij (10.4). De waarde  $\varphi_N$ , waar in de laatste kolom van (10.1) mee gestart wordt, is daar eveneens vermeld.

Voor deze studie zijn de gepresenteerde algoritmen voldoende om alle benodigde elliptische functies uit te drukken in getallen. Het is dan wel nodig dat de waarde van de parameter bekend is. Dit is niet altijd het geval in expliciete zin. Vaak is de nome expliciet bekend. Er is een snelle en preciese formule, die de parameter koppelt aan de nome. Via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.38.7 en 16.38.5 volgt:

$$\sqrt[4]{m} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2}}{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}} \quad q = \exp\left\{-\pi \frac{K(1-m)}{K(m)}\right\} \quad (10.6)$$

Vergeet niet dat  $m$  door  $1-m$  vervangen mag worden voor een betere convergentie.

Om te zien hoe het werken met de methode van het aritmetisch-geometrisch gemiddelde uitpakt, is er een spread-sheet programma geschreven. Dit bleek zeer succesvol. Vervolgens is er onder Delphi een object georiënteerde bibliotheek van elliptische functies geschreven. Geschreven. Deze is compleet en bevat ook elliptische integralen van de tweede en derde soort en Zeta-functies. Bij de huidige fragmenten spelen deze geen rol. In bijlage C, Voorbeelden programmatuur, is van beide programma's een visuele impressie gegeven.

Tot slot zal er een korte beschrijving gegeven worden hoe er gebruik gemaakt kan worden van de bibliotheek van elliptische functies. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat er voldoende ervaring aanwezig is met het programmeren in de ontwikkelomgeving Delphi. Zodra de programmeur elliptische verbanden moet gaan gebruiken dient er een elliptische object te worden aangemaakt. Dit object krijgt een herkenbare naam, bijvoorbeeld 'Fragment' of 'LeftFrgm' of 'RghtFrgm'. Voor het aanmaken geldt het volgende commando:

*Fragment := DElliptic.Create(Parameter, Karakteristiek, Amplitude, Argument);*

De argumenten spreken voor zich. Zodra dit kommando gegeven is, is de gehele elliptische ruimte gevuld met waarden, die bij de argumenten horen.

Het kan voorkomen dat gedurende een berekening een van de argumenten moet worden aangepast. Dit gebeurt door een eenvoudige toekenning. Op dat moment wordt niet alleen de toekenning uitgevoerd, maar de gehele elliptische ruimte aangepast aan de verandering. Mogelijke toekenningen zijn:

*Fragment.M\_Prmt := NieuweWaarde;* (Parameter)  
*Fragment.A\_Angl := NieuweWaarde;* (Modulaire hoek)  
*Fragment.Q\_Nome := NieuweWaarde;* (Nome)  
*Fragment.N\_Chrt := NieuweWaarde;* (Karakteristiek)  
*Fragment.Ampltd := NieuweWaarde;* (Amplitude)  
*Fragment.Argmnt := NieuweWaarde;* (Argument)

De eerste drie, Parameter, Modulaire hoek en Nome, hangen één-eenduidig samen. Als in de eerste vier het onderstrepingsteken ( \_ ) vervangen wordt door 1, dan betreft het de complementaire grootheden.

Uit het elliptisch object kunnen alle benodigde functiewaarden worden gelezen, zodra deze nodig zijn.

De volgende grootheden zijn benaderbaar:

*Fragment.K\_Cpt1;* (Complete integraal eerste soort)  
*Fragment.F\_Int1;* (Incomplete integraal eerste soort)  
*Fragment.E\_Cpt2;* (Complete integraal tweede soort)

<i>Fragment.E_Cpt2;</i>	(Complete integraal tweede soort)
<i>Fragment.E_Int2;</i>	(Incomplete integraal tweede soort)
<i>Fragment.P_Cpt3;</i>	(Complete integraal derde soort)
<i>Fragment.P_Int3;</i>	(Incomplete integraal derde soort)
<i>Fragment.Sn_Jcb;</i>	(Jacobiaanse sn-functie)
<i>Fragment.Cn_Jcb;</i>	(Jacobiaanse cn-functie)
<i>Fragment.Dn_Jcb;</i>	(Jacobiaanse dn-functie)
<i>Fragment.Tt_Jcb;</i>	(Logaritme van Som en Verschil van Jacobiaanse theta-functies)
<i>Fragment.F_Int3;</i>	(Corresponderende incomplete integraal eerste soort bij theta-functie)

Ook hier mag het onderstrepingsteken ( \_ ) vervangen worden door 1 om de complementaire grootheden te verkrijgen.

Zodra een elliptische klasse niet meer nodig is , wordt deze weggegooid:

*Fragment.Free;*

Nu zal in het kort worden aangegeven wat er gedaan moet worden om de berekeningen voor de case studies in te richten. Een algemene formulering wordt gepresenteerd. De programmeur moet het linker en rechter deel zelf onderscheiden.

Rivierdijk zonder berm achter de damwand	
geen gat geen lek (9.2);	$Fragment.Create(m, 0.5, 0, 0)$ $K(1-m) = Fragment.K1Cpt1$ $K(m) = Fragment.K\_Cpt1$
alleen gat geen lek (9.3) (9.4);	$Fragment.Create\left(m, 1 - \frac{m}{n}, \arcsin \sqrt{\frac{1 - mw_G}{1 - m}}, 0\right)$ $\frac{V(w_G; m)}{K(m)} = Fragment.F1Int1$ $K(1-m) = Fragment.K1Cpt1$
geen gat alleen lek (9.6) (9.7);	$\frac{V(1/n; m)}{K(m)} = Fragment.F1Int3$ $K(m) = Fragment.K\_Cpt1$ $\frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\Theta[V(w_G; m) + V(1/n; m)   1-m]}{\Theta[V(w_G; m) - V(1/n; m)   1-m]} \right\} = Fragment.Tt1Jcb$

In het eerste geval, geen gat en geen lek, speelt alleen de Parameter een rol. Voor de andere argumenten wordt daarom een passende dummy grootheid meegegeven, die verder geen invloed heeft. In geen van de gevallen speelt het het vierde argument (Argument genoemd) een rol.

Rivierdijk met opdrijvend achterland	
rechter subfragment (9.10) en (9.11)	$FrgmGeom.Create\left(0.5, 0.5, 0, \frac{\delta}{L_R}\right)$ $FrgmGeom.Q\_Nome = Exp\left(-\pi \frac{D}{L_R}\right)$ $Th_t = \arcsin\left(\sqrt{FrgmGeom.M1Prmt / FrgmGeom.Dn\_Jcb}\right)$ $FrgmPsi.Create\left(\{FrgmGeom.Dn\_Jcb\}^2, 0.5, Th_t, 0\right)$ $FrgmPhi.Create\left(\{FrgmGeom.Cn\_Jcb\}^2, 0.5, Th_t, 0\right)$

De lengte-dikte verhouding van een fragment is uitgedrukt door de Nome. Het object heeft als invoer tijdens creatie de Parameter nodig. Zo is dat gemaakt. Daarom moeten we ons 'behelpen' door eerst het fragment te creëren voor dummy parameters en daarna de juiste Nome in te stellen. Vervolgens worden er twee objecten gemaakt voor open (psi) en dichte (phi) subfragmenten. Hieruit volgen de gegevens voor (9.9), via de namen zoals hierboven zijn aangegeven. Bedenk hierbij dat de incomplete integraal van de eerste soort genormeerd is door de volledige integraal:  $F(\varphi |m)/K(m)$ .

Sluis met dichte kolkvloer	
linker subfragment (9.17) en (9.18)	$FrgmGeom.Create\left(0.5, 0.5, 0, \frac{\ell_L}{D}\right)$ $FrgmGeom.Q\_Nome = Exp\left(-\pi \frac{D}{L_L}\right)$ $Th_t = \arcsin\sqrt{FrgmGeom.M1Prmt}$ $FrgmPsi.Create\left(\{FrgmGeom.Cn1Jcb / FrgmGeom.Dn1Jcb\}^2, 0.5, Th_t, 0\right)$ $FrgmPhi.Create\left(\{FrgmGeom.Cn1Jcb\}^2, 0.5, Th_t, 0\right)$

De statements lijken sterk op die gebruikt bij het opdrijfgeval. Uit de gemaakte objecten volgen de gegevens voor (9.15) en (9.16), via de namen zoals hierboven aangegeven. Bedenk hierbij dat de incomplete integraal van de eerste soort genormeerd is door de volledige integraal:  $F(\varphi |m)/K(m)$ .





## 11 Samenvatting en conclusies

Dit rapport behandelt een speciale aanpak van stroming onder dijken en kunstwerken: fragmentenmethode. Er is één enkel fragment ontwikkeld waaraan de naam universeel fragment gegeven is. Hiermee is het mogelijk elke geometrie onder een dijk of kunstwerk voldoende accuraat te fragmenteren.

Alle in het verleden gedefinieerde fragmenten kunnen beschreven worden via het universele fragment. Er zijn vier nieuwe typen toegevoegd: gatfragment, lekfragment, zettingsfragment en opdrijffragment. Ook deze zijn opgebouwd uit het universele fragment of een tweetal samengestelde universele fragmenten.

Bij opdrijven hoeft volgens de leidraad in de spleet het intreedebiet niet gelijk aan het uitreedebiet te zijn. Het surplus aan debiet vloeit af door een opbarsting. Het gevaar bestaat hierbij dat opdrijven overgaat in onderloopsheid. Met klem wordt aangeraden hierover een discussie op te zetten. Opdrijffragmenten kunnen ook gebruikt worden bij sluizen met open kolkvloer.

In de toekomst kunnen de onderloopsheidfragmenten, zoals polderfragment en sluisfragment, eveneens beschreven worden via het universele fragment. Zij zijn niet betrokken in deze studie, omdat eerst voldoende ervaring moet worden opgedaan met het convergentieproces van de uitreedebieten naar het erosiekanaal.

Het universele fragment is geheel beschreven in termen van elliptische functies. Hiervoor is een bibliotheek ontwikkeld op basis van het algoritme van van het aritmetisch-geometrisch gemiddelde. Deze bibliotheek is het uitgangspunt voor praktijkberekeningen.

Om de voorbeelden in het rapport zichtbaar te maken is een procedure geschreven. Deze procedure betreft alleen het gegeven voorbeeld. Aangeraden wordt deze algemeen te maken en te plaatsen op een rekenplankje. Dan kan dit bij advisering gebruikt worden om het globale effect van een verschijnsel af te schatten.

De conclusie van deze studie luidt

- Het universele fragment is een buitengewoon krachtig instrument om een dijk of kunstwerk mee te fragmenteren.
- Het heeft voldoende flexibiliteit om alle van belang zijnde geometrieën aan te kunnen. Het speelt de rol van een veelvormige 'legosteent', waaruit een groter geheel wordt opgebouwd.
- Het begrijpen van de achtergrond van het universele fragment vereist een goed theoretisch begrip van de elliptische functieruimte. Voor het rekenen met elliptische functies is een elliptische klasse gemaakt. Hiermee werken vereist enige oefening.



## 12 Referenties

[Pavlovsky 1956]

N.N. Pavlovsky

Collected Works

Akad. Nauk USSR, Inc., New York.

[Gröbner, Hofreiter 1966]

W. Gröbner, N. Hofreiter

Integraltafel Teil I und II

Springer-Verlag, Wien, New York

[Abramowitz, Stegun 1968]

M. Abramowitz, I.A. Stegun

Handbook of Mathematical Functions

Dover Publications, Inc. , New York

[Sellmeijer 1995]

J.B. Sellmeijer

Heaving bij kunstwerken, CO 356020/7

Rapport in opdracht van Rijkswaterstaat, Dienst Weg- en Waterbouwkunde

[Sellmeijer 1996]

J.B. Sellmeijer

Integratie Ontwerpregels Piping & Heaving, CO 362570/6

Rapport in opdracht van Rijkswaterstaat, Dienst Weg- en Waterbouwkunde



## A Uitwerking van het potentiaalvlak

De afbeelding van het potentiaalvlak  $\Omega$  op het potentiaalvlak  $w$  is opgesteld via een Schwarz-Christoffel transformatie. Het resultaat hiervan is een uitdrukking in integraalvorm. Deze is elliptisch van karakter en kan uitgedrukt worden in standaard elliptische functies, zie [Abramowitz, Stegun 1968], hoofdstukken 16 en 17. Dit zal in deze bijlage worden uitgevoerd. Het volgende verband wordt gekopieerd van (5.7):

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{\delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}} (n-m) \int_1^w \left\{ \frac{1}{v-1} + \frac{1}{1-nu} \right\} \frac{1}{\sqrt{u-1}} \frac{1}{\sqrt{1-mu}} d\sqrt{u} \quad [A.1]$$

Via [Abramowitz, Stegun 1968], 17.2.7 en 15, kunnen direct de betreffende functies worden ingevuld. Echter, dit leidt tot een complexe (reëel plus imaginair) formulering op randen, waar ook een puur reële mogelijk is en natuurlijk de voorkeur heeft voor een numerieke uitwerking.

Er zijn vier randen, waarop de uitwerking kan worden toegespitst:  $\mathcal{KN}$ ,  $\mathcal{NM}$ ,  $\mathcal{ML}$  en  $\mathcal{LK}$ . Dit voert tot vier verschillende formuleringen, die volstrekt identiek aan elkaar zijn en op hun traject alle reëel van karakter zijn. Slechts twee ervan zijn voor ons probleem interessant:  $\mathcal{NM}$  en  $\mathcal{ML}$ . De eerste specificiert een uitdrukking voor het totale debiet; de tweede legt de potentiaal rond de bron vast en geeft een voorwaarde, waarmee het stagnatiepunt bepaald is. De overige twee randen bevestigen, wat er gevonden is.

Op de rand  $\mathcal{ML}$  is [A.1] overal reëel. De vorm van de integraal is echter nog niet helemaal geschikt. De substitutie  $u = \text{dn}^2(v|1-m)/m$  verhelpt dit, waarin  $\text{dn}$  een Jacobijnse elliptische functie is. De diverse Jacobijnse elliptische functies zijn in elkaar uit te drukken. We zullen werken met  $\text{sn}$ ,  $\text{cn}$  en  $\text{dn}$ . Er geldt bijvoorbeeld  $\text{cn}^2(v|1-m) = 1 - \text{sn}^2(v|1-m)$  en  $\text{dn}^2(v|1-m) = 1 - (1-m)\text{sn}^2(v|1-m)$ . Dit betekent dat  $1-mu = (1-m)\text{sn}^2(v|1-m)$  en  $u-1 = (1-m)\text{cn}^2(v|1-m)/m$ . Voor de grenzen van de integraal moet  $v$  expliciet bekend zijn. Hiervoor volgt met  $u = w$ :

$$\text{sn}(v|1-m) = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \quad \text{of} \quad v = F(\vartheta|1-m) \quad \vartheta = \arcsin \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \quad [A.2]$$

Hierin is  $F$  een (onvolledige) elliptische integraal van de eerste soort. De definitie dat een elliptische integraal de inverse is van een Jacobijnse elliptische functie is een basisprincipe van de theorie. In [Abramowitz, Stegun 1968], hoofdstukken 16 en 17, is dit aangegeven. Er zijn nu genoeg gegevens om [A.1] om te werken:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{\delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}} (n-m) \int_{K(1-m)}^{F(\vartheta|1-m)} \left\{ \frac{1}{v-1} + \frac{1}{1-\frac{n}{m} \text{dn}^2(v|1-m)} \right\} \frac{d\{\text{dn}(v|1-m)\}}{(1-m)\text{cn}(v|1-m)\text{sn}(v|1-m)} \quad [A.3]$$

Voor het differentiëren van elliptische functies bestaan natuurlijk rekenregels. In [Abramowitz, Stegun 1968], 16.16 zijn deze te vinden. De tweede term van de integraal wordt wel erg eenvoudig:  $-dv$ . De  $\text{dn}$  in de eerste term wordt omgewerkt naar een  $\text{sn}$ :

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{\delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}} (n-m) \int_{F(\vartheta|1-m)}^{K(1-m)} \left\{ \frac{1}{v-1} - \frac{m}{n-m-n(1-m)\text{sn}^2(v|1-m)} \right\} dv \quad [A.4]$$

Aldus is de integraal omgewerkt naar de definitie van twee elliptische functies, een van de eerste en een van de derde soort. Om de notatie hanteerbaar te houden verleggen we de bovengrens naar punt  $\mathcal{L}$ , wat overeenkomt met een verschuiving  $P+i\delta Q$  in de potentiaal en een bovengrenswaarde 0 voor de integraal. Met behulp van [Abramowitz, Stegun 1968], 17.2.16 volgt er:

$$\frac{\pi}{2} \frac{P+i\delta Q-\Omega}{\delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}} (n-m) \left[ \frac{1}{v-1} F(\vartheta|1-m) - \frac{m}{n-m} \Pi\left\{n \frac{1-m}{n-m}; F(\vartheta|1-m)|1-m\right\} \right] \quad [A.5]$$

Deze oplossing is in het hele veld geldig. Hij komt het meest tot zijn recht op de rand  $\mathcal{LPQM}$ , omdat het gedrag dan reëel is, afgezien van de sprong bij  $Q$ . Deze sprong kan goed worden weergegeven door middel van een logaritmische formulering. Daartoe worden [Abramowitz, Stegun 1968], 17.7.7 en 17.7.8 in ogenschouw wordt genomen. De notatie is typisch in de vorm van elliptische integralen. Tot nu toe is de Jacobijnse notatie gebruikt. Daarom schrijven we [Abramowitz, Stegun 1968], 17.7.8 eerst om met behulp van 17.2.2 en 17.2.4 en [A.2]:

$$\begin{aligned} \Pi\left\{n \frac{1-m}{n-m}; F(\vartheta|1-m)|1-m\right\} &= \sqrt{\frac{n}{1-n}} \frac{n-m}{m^2} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-n}{w-1}} \frac{1-mw}{n-m} \frac{1}{nw} \\ &+ F(\vartheta|1-m) - \Pi\left(1-\frac{m}{n}; F(\vartheta|1-m)|1-m\right) \end{aligned} \quad [A.6]$$

De logaritme is verwerkt in de  $\operatorname{arctanh}$  via [Abramowitz, Stegun 1968], 4.6.22. We zien dat de angel van de elliptische integraal van de derde soort voor  $w=1/n$  overgegaan is op de  $\operatorname{arctanh}$ .

In Fig. A.1 is aangegeven hoe de logaritmische hulpfunctie in elkaar zit. Het rechter deel van de strip is typisch het gedrag van een bron bij punt  $Q$  met lekdebiet  $\delta Q$ . Echter, het hulpvlak introduceert tegelijkertijd een nieuwe bron ergens op  $\mathcal{NK}$  met tegengesteld lekdebiet  $\delta Q$ . Dat betekent dat [A.6] alleen op  $\mathcal{LM}$  goed bruikbaar is en zeker niet op  $\mathcal{NK}$ .

Voor punt  $\mathcal{M}$  worden de elliptische integralen in [A.6] volledig. De schrijfwijze wordt dan eenvoudiger en zou overeen moeten komen met [Abramowitz, Stegun 1968], 17.7.9. Dit is zo, op een imaginaire verschuivingsterm na. Hier wordt gevonden:

$$\Pi\left(n \frac{1-m}{n-m} |1-m\right) = -\frac{\pi}{2} i \sqrt{\frac{n}{1-n}} \frac{n-m}{m^2} + K(1-m) - \Pi\left(1-\frac{m}{n} |1-m\right) \quad [A.7]$$

In [Abramowitz, Stegun 1968] wordt het imaginaire residu door de bron niet vermeld. Het kan zijn dat alleen het Cauchy deel bedoeld wordt, maar dit blijkt niet uit de notatie.

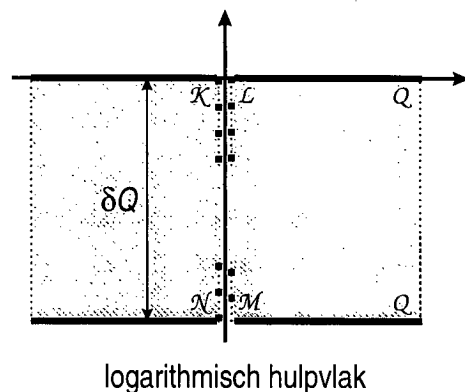


Fig. A.1: gedrag rond bron

We gaan nog een stapje verder door de derde soort elliptische integraal uit het rechter deel van [A.6] om te werken tot zêta- en thêtafuncties. Dit leidt tot een kortere notatie die iets inzichtelijker is. We maken gebruik van [Abramowitz, Stegun 1968], 17.7.2 en 3. Helaas verdient de notatie van deze formule geen schoonheidsprijs. Het kost nogal wat denkwerk om de goede waarden in te vullen. We zullen dit stap voor stap doen.

We beginnen met het uitschrijven van onze derde soort elliptische functie door in [Abramowitz, Stegun 1968], 17.7.2 en 3 de parameter, de karakteristiek en de amplitude in te vullen:

$$\Pi\left\{1-\frac{m}{n}; F(\vartheta|1-m)|1-m\right\} = \sin \vartheta = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}}$$

$$\sqrt{\frac{n}{1-n} \frac{n-m}{m^2}} \left[ \frac{\pi F(\vartheta|1-m)}{2 K(1-m)} \frac{\vartheta_1 \left( \frac{\pi F(\varepsilon|1-m)}{2 K(1-m)} \right)}{\vartheta_1 \left( \frac{\pi F(\varepsilon|1-m)}{2 K(1-m)} \right)} - \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\vartheta_4 \left( \frac{\pi F(\vartheta|1-m) + F(\varepsilon|1-m)}{2 K(1-m)} \right)}{\vartheta_4 \left( \frac{\pi F(\vartheta|1-m) - F(\varepsilon|1-m)}{2 K(1-m)} \right)} \right\} \right] \quad [A.8]$$

$\vartheta_1$  en  $\vartheta_4$  zijn thêtafuncties. Deze moeten niet verward worden met de amplitude  $\vartheta$ . Deze thêtafuncties zijn voor onze doelstelling niet de meest handige keus. We zullen ze dan ook gaan omwerken naar een generiekere notatie.

Qua compactheid en ook numerieke mogelijkheden zijn we gediend met de Jacobijnse notatie van de thêtafuncties en aanverwante zêtafuncties. [Abramowitz, Stegun 1968], 16.34.1 wordt aangewend. De laatste term hierin is de inverse van de coëfficiënt die voor [A.8] staat in de onderste regel. Dit kan worden ingezien door te realiseren dat  $\operatorname{sn}\{F(\varepsilon|1-m)|1-m\} = \sin \varepsilon$ . Aldus wordt  $\vartheta_1$  vervangen door de Jacobijnse zêtafunctie. En passant vervangen we  $\vartheta_4$  via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.31.1 door de Jacobijnse thêtafunctie:

$$\Pi\left\{1-\frac{m}{n}; F(\vartheta|1-m)|1-m\right\} - F(\vartheta|1-m) = \sin \vartheta = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}}$$

$$\sqrt{\frac{n}{1-n} \frac{n-m}{m^2}} \left[ F(\vartheta|1-m) Z[F(\varepsilon|1-m)|1-m] - \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\Theta[F(\vartheta|1-m) + F(\varepsilon|1-m)|1-m]}{\Theta[F(\vartheta|1-m) - F(\varepsilon|1-m)|1-m]} \right\} \right] \quad [A.9]$$

Het is een lange weg geweest, maar we zijn uiteindelijk teruggekeerd tot de 'roots' van de elliptische functies: Jacobi. We kunnen nu met een gerust hart de oplossing aanpassen. Uit [A.5], [A.6] en [A.9] volgt:

$$\frac{\pi P + i\delta Q - \Omega}{2 \delta Q} = -\operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-n}{w-1} \frac{1-mw}{n-m} \frac{1}{nw}} + \sqrt{\frac{1-n}{n} (n-m)} \frac{F(\vartheta|1-m)}{v-1} \quad \sin \vartheta = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}}$$

$$F(\vartheta|1-m) Z[F(\varepsilon|1-m)|1-m] - \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\Theta[F(\vartheta|1-m) + F(\varepsilon|1-m)|1-m]}{\Theta[F(\vartheta|1-m) - F(\varepsilon|1-m)|1-m]} \right\} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}}$$

[A.10]

In deze vorm is het resultaat zeer geschikt om het stijghoogteverloop bij de bron te karakteriseren. De singulariteit zit in de hyperbolische functie en de overige termen zijn daar zeer vlak. Wel moet de stagnatieparameter nog gespecificeerd worden. Deze volgt uit de waarden in punt  $\mathcal{M}$ . Daar is  $\Omega$  gelijk aan 0 voor  $w = 1$ :

$$\frac{\pi P}{2 \delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}(n-m)} \frac{K(1-m)}{v-1} + K(1-m) Z[F(\varepsilon | 1-m) | 1-m] \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}} \quad [A.11]$$

Hieruit volgt een expliciete waarde voor de stagnatieparameter.

De mathematische beschrijving is op dit moment zodanig geformuleerd, dat het gedrag langs  $\mathcal{LPQM}$  op een reële wijze beschreven is. Er zijn echter nog meer randen, elk met hun specifieke reële notatie. Alle hebben [A.1] als basis; de uitwerking per lijndeel zal moeten worden aangepast. Voor  $\mathcal{MN}$  zal dit nu worden gedaan, omdat dit het totaal doorstroomde debiet zal vastleggen. De overige lijndelen,  $\mathcal{NK}$  en  $\mathcal{KL}$ , leveren geen nieuwe informatie op en worden dus weggelaten. Wel is het een goede oefening om ze uit te werken en te zien dat hiermee exact dezelfde voorwaarden verkregen worden als de huidige uitkomsten.

Op  $\mathcal{MN}$  is de potentiaal puur imaginair. Daarom vermenigvuldigen we [A.1] links en rechts met  $i$ . Rechts komt dit neer op het plaatsen van een min-teken in de noemer  $u-1$ :

$$\frac{\pi i \Omega}{2 \delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}(n-m)} \int_1^w \left\{ \frac{1}{v-1} + \frac{1}{1-nu} \right\} \frac{1}{\sqrt{1-u}} \frac{1}{\sqrt{1-mu}} d\sqrt{u} \quad [A.12]$$

Deze integraal behoeft nog nauwelijks bewerkt te worden. Hij staat al uitgeschreven in de grondvorm van elliptische integralen. De volgende substitutie voert onmiddellijk tot het gewenste doel:

$$\operatorname{sn}(v|m) = \sqrt{u} \quad \text{of} \quad v = F(\arcsin \sqrt{u} | m) \quad [A.13]$$

Hiermee volgt voor [A.12] met behulp van [Abramowitz, Stegun 1968], 16.16.1:

$$\frac{\pi i \Omega}{2 \delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}(n-m)} \int_1^{F(\arcsin \sqrt{w}|1)} \left\{ \frac{1}{v-1} + \frac{1}{1-n \operatorname{sn}(v|m)} \right\} dv \quad [A.14]$$

Aldus is de integraal weer omgewerkt naar de definitie van twee elliptische functies, een van de eerste en een van de derde soort. We hebben alleen de waarde in punt  $\mathcal{N}$  nodig, waar  $\Omega$  gelijk is aan  $iQ$  voor  $w = 0$ . Met behulp van [Abramowitz, Stegun 1968], 17.2.16 volgt er:

$$\frac{\pi Q}{2 \delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}(n-m)} \left\{ \frac{1}{v-1} K(m) + \Pi(n|m) \right\} \quad [A.15]$$

Alle benodigde ingrediënten die nodig zijn voor het beschrijven van de grondwaterstroming zijn nu bekend. Er is al opgemerkt dat de berekening verfijnd kan worden door ook langs de beide overblijvende randen een toegesneden formulering op te zetten. Hiermee worden dan de beide voorwaarden [A.11] en [A.15] wederom verkregen. Dit is een goede controle, die voor de zekerheid natuurlijk uitgevoerd is, maar hier niet zal worden uitgewerkt.



Een kleine complicatie moet echter wel vermeld worden. De uitwerking voor  $\mathcal{KL}$  leidt niet direct tot een identieke formulering, maar pas na realisering van de volgende identiteit, die vermeld is in [Gröbner, Hofreiter 1966], II,221,8 en 9a:

$$\Pi(n|m) + \Pi\left(\frac{m}{n}|m\right) = K(m) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n-1}{1-n} \frac{1}{n-m}} \quad [A.16]$$

De reden is de aanwezigheid van de bron, die aan het totale debiet het brondebiet toevoegt. De relatie biedt een uitgelezen mogelijkheid om over te gaan op Jacobijnse zêtafuncties. Dit doen we door gebruik te maken van [Abramowitz, Stegun 1968], 17.7.14

$$\Pi\left(\frac{m}{n}|m\right) = K(m) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{n-1}{1-n} \frac{1}{n-m}} \left\{ 1 - \frac{F(\varepsilon|1-m)}{K(1-m)} - \frac{2}{\pi} K(m) Z[F(\varepsilon|1-m)|1-m] \right\} \quad [A.17]$$

$$\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}}$$

Ondanks het feit dat we hier in een ander segment van de rekenruimte van de elliptische integralen zitten, zien we toch de al eerder gebruikte amplitude  $\varepsilon$  terug. Het totale debiet [A.15] wordt nu via [A.16] en [A.17] geheel in de stijl van Jacobi herschreven:

$$\frac{\pi}{2} \frac{Q}{\delta Q} = \sqrt{\frac{1-n}{n}} \frac{(n-m)}{\nu-1} \frac{K(m)}{K(1-m)} + \frac{\pi}{2} \frac{F(\varepsilon|1-m)}{K(1-m)} + K(m) Z[F(\varepsilon|1-m)|1-m] \quad [A.18]$$

Alle benodigde gegevens zijn nu voorhanden. Het gedrag langs de rand waar de bron op ligt is bekend in [A.10]. En er zijn de voorwaarden [A.11] en [A.18]. Uit deze drie vergelijkingen wordt de stagnatieparameter geëlimineerd, waarna de potentiaalverdeling langs de bron overblijft en een specificatie van het totale debiet. Uit [A.10] en [A.18] volgt:

$$\frac{\Omega - P}{\delta Q} + \frac{Q}{\delta Q} \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} = i + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-n}{w-1} \frac{1-mw}{n-m} \frac{1}{nw}} \quad \sin \vartheta = \sqrt{\frac{1-mw}{1-m}}$$

$$+ \frac{1}{\pi} \ln \left\{ \frac{\Theta[F(\vartheta|1-m) + F(\varepsilon|1-m)|1-m]}{\Theta[F(\vartheta|1-m) - F(\varepsilon|1-m)|1-m]} \right\} + \frac{F(\varepsilon|1-m)}{K(1-m)} \frac{F(\vartheta|1-m)}{K(m)} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}} \quad [A.19]$$

De zêtafunctie blijkt nu zelfs weg te vallen. Het totale debiet is gespecificeerd door [A.11] en [A.18]:

$$\frac{P}{\delta Q} = \frac{Q}{\delta Q} \frac{K(1-m)}{K(m)} - \frac{F(\varepsilon|1-m)}{K(m)} \quad \sin \varepsilon = \sqrt{\frac{1-m/n}{1-m}} \quad [A.20]$$

De oplossing is nu volledig in kaart gebracht. De afbeelding van het potentiaalvlak op het potentiaal-hulpvlak is weergegeven door [A.19]. Deze uitdrukking is toegesneden op het lijnstuk  $\mathcal{LPQM}$ , omdat de elliptische functies voor de waarden daar getabelleerd zijn. Echter, [A.19] is algemeen in het gehele veld geldig. Het totale debiet door het fragment is gespecificeerd in [A.20].

Om te zien hoe het potentiaalvlak is opgebouwd uit de diverse onderdelen, is tenslotte een grafische voorstelling gegeven in Fig. A.2. Het bovenste vlak is een rechthoek en behoeft geen betoog. Een

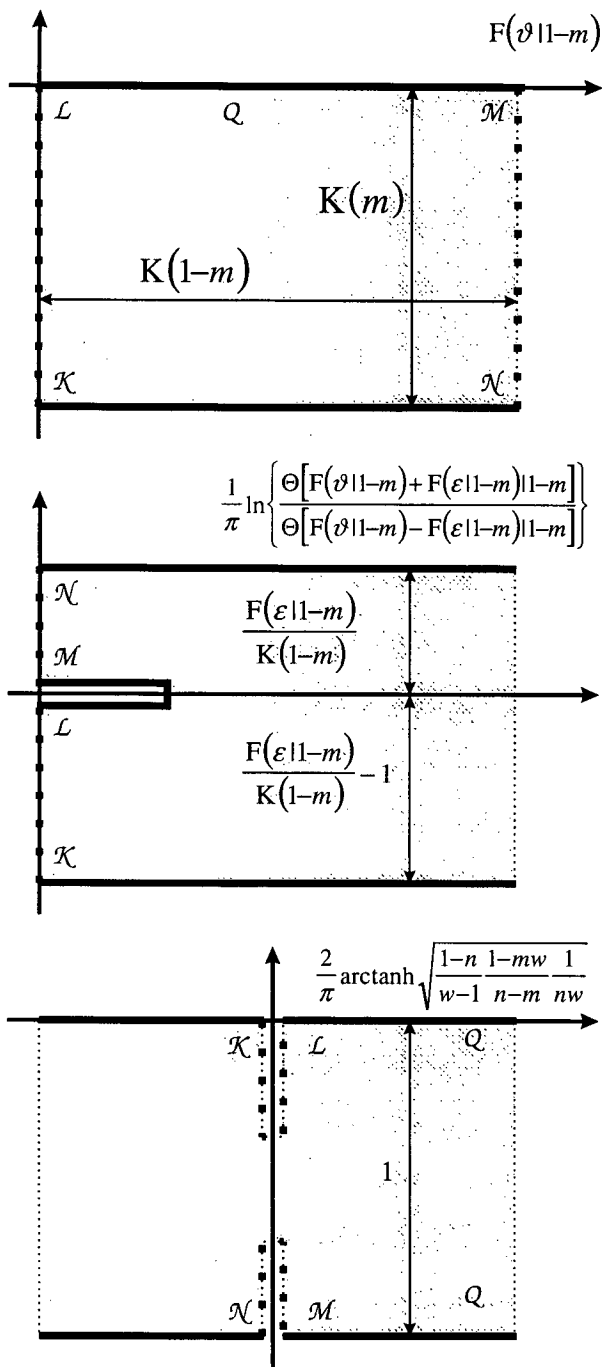


Fig. A.2: diverse componenten potentiaalvlak

elliptische integraal van de eerste soort heeft de eigenschap dat een halfvlak op een rechthoek wordt afgebeeld. Dit is een belangrijk onderdeel in de afbeelding van het potentiaalvlak. Niet alleen omdat het belangrijkste deel van dit vlak inderdaad een rechthoek is, maar ook omdat de rechthoek de vorm van de afwijkende delen mede helpt bepalen.

Het middelste vlak toont de vorm van de thêtafunctie. Het is het vlak dat hoort bij een denkbeeldige bron op  $\mathcal{N}\mathcal{K}$ , die afwatert naar  $\mathcal{K}\mathcal{L}$  en  $\mathcal{M}\mathcal{N}$ . Dat is nodig, omdat het laatste vlak, de  $\operatorname{arctanh}$ , weliswaar de werkelijke bron zo mooi isoleert, maar dit doet ten koste van de introductie van een geheel niet bestaande put. Deze moet natuurlijk gecompenseerd worden en dat doet de thêtafunctie.

Het is een beetje een mysterieus vlak, de Jacobijnse thêtafunctie. Via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.33 is genoeg informatie beschikbaar om de hoekpunten vast te leggen. En 16.32.4 is een uitmuntend numeriek algoritme om reële waarden te genereren. Maar in het veld zelf weten we niet zoveel. Gelukkig is dit niet nodig en hebben we alleen de reële waarden nodig.

Aan de hand van de schetsen kan gecontroleerd worden, of het potentiaalvlak goed is afgebeeld op het potentiaalhelpvlak. Dit blijkt inderdaad zo te zijn. Hieruit blijkt toch wel de grote kracht van de Jacobijnse elliptische functies.

We gaan nu terug naar hoofdstuk 5 om de afbeelding van het potentiaalvlak op het geometrievlak te voltooien.

## B Positionering karakteristieke punten

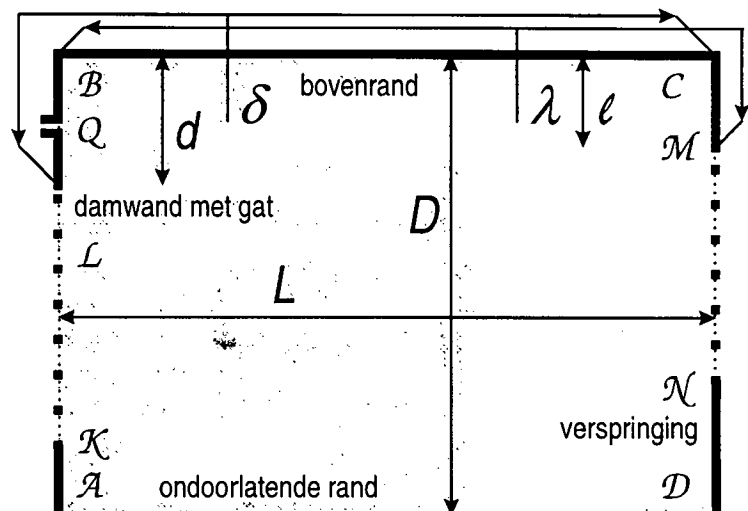
Voor de afleiding van het verband tussen potentiaal en geometrie is gebruik gemaakt van hulpvlakken. In deze vlakken zitten karakteristieke punten, die mede helpen de oplossing vorm te geven. De waarde van deze punten is volledig door de geometrie bepaald. Een sterk punt van de oplossing is dat deze gedefinieerd kan worden zonder deze waarden op voorhand te kennen. Hun invloed is samengebond in grootheden als parameter, karakteristiek en gatrand. In deze bijlage zal het verband tussen deze grootheden en de karakteristieke punten gelegd worden.

Met de maatvoering in het geometrievlak dienen we de uiterste voorzichtigheid te betrachten. Als elke maat aangegeven wordt met een eigen symbool, is de kans heel groot dat de fragmenten niet goed op elkaar aansluiten. Er zal dus een minimum aan symbolen gedefinieerd moeten worden, zodat een wijziging van een waarde onmiddellijk doorwerkt in de geassocieerde afstanden. De maatvoering moet in staat zijn de afzonderlijke en ook gecombineerde fragmenten van *Figuur 4.2* en *Figuur 4.3* weer te geven.

Aansluiting wordt gegarandeerd met de maatvoering in *Fig. B.1*. Enerzijds is er een lijst beschikbaar met waarden voor afstanden als: damwandlengte, inspringslengte, pakketlengte en -hoogte. In een numeriek programma worden deze waarden verwerkt via vier afstanden. Pakketlengte en -hoogte blijven ongewijzigd. De damwand wordt echter gekarakteriseerd door de som van zijn eigen lengte en die van bovenrand samen; de inspringslengte (al dan niet met damwand) aan de rechter bovenzijde door zijn eigen lengte en die van bovenrand samen. Alle andere maten zijn in deze vier afstanden uit te drukken.

De numerieke code bepaalt de werkelijke lengte van de damwand door de pakketlengte af te trekken van de ingevoerde waarde en te kijken of het resultaat positief is. Indien niet, dan is de damwandlengte nul en is er sprake van een gedeeltelijk doorlatende bovenrand. De sprong van de bovenrand volgt uit het verschil

van beide werkelijke damwandlengten van twee aangrenzende fragmenten. Immers, de onderzijde van de damwand hebben de fragmenten gemeen. Ditzelfde geldt voor de inspringslengte aan de bovenzijde. De ondoorlatende rand ligt over een afstand van de pakketdikte onder de bovenrand. Het verschil van de posities van de ondoorlatende randen levert de sprong aan de onderzijde op. Aldus zijn de



*Fig. B.1: maatvoering universeel fragment*

posities van de punten  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$  en  $\mathcal{N}$  vastgelegd. Het gat is gesitueerd vlak tegen de laagste bovenrand van twee aansluitende fragmenten. De positie van punt  $Q$  ligt dus eveneens vast.

De parameter, karakteristiek en gatrand zijn door het verband tussen de beide hulpvlakken (5.10) gekoppeld aan de karakteristieke punten. De karakteristieke punten zijn op hun beurt bepaald door de relatie tussen geometrie en hulpvlak (5.2):

$$w = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta - \zeta_N}{\zeta - \zeta_K} \quad \zeta = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{z}{L} K(\mu) | \mu \right\} \quad \frac{D}{L} = \frac{K(1-\mu)}{K(\mu)} \quad [B.1]$$

Onze taak is nu de maatvoering van de karakteristieke punten te verwerken in de corresponderende punten van het geometriehulpvlak. Ze zijn dan direct gekoppeld aan het potentiaalhelpvlak.

Daartoe schrijven we de punten van het geometriehulpvlak één voor één uit met behulp van [B.1] en Fig. B.1. Er zijn drie trajecten: een puur imaginair traject  $AB$ ; een puur reëel traject  $BC$  en een complex traject  $CD$  met als reëel deel de kwart periode  $K(\mu)$ . De middelste is al genoteerd in reële vorm. De eerste en laatste zijn in reële vorm te schrijven via [Abramowitz, Stegun 1968], 16.8 en 16.20:

$$\operatorname{dn}^2 \left\{ -i \frac{y}{L} K(\mu) | \mu \right\} = \operatorname{ns}^2 \left\{ \frac{D-y}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad [B.2]$$

$$\operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{L-iy}{L} K(\mu) | \mu \right\} = (1-\mu) \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D-y}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\}$$

Prachtig is te zien hoe de trajecten op elkaar aansluiten. De onderste term loopt van 0 tot  $1-\mu$ , de middelste van  $1-\mu$  tot 1 en de bovenste loopt vanaf 1.

Vanaf hier is het een kwestie van invullen. Allereerst wordt punt  $\mathcal{L}$  beschouwd. Dit kan de onderkant van de damwand aangeven, maar ook het eind van de opdrijfzone. Dit volgt uit de opgegeven damwandlengte en de bovenste relatie van [B.2]:

$$\zeta_L = \operatorname{dn}^2 \left\{ -i \frac{d}{L} K(\mu) | \mu \right\} = \operatorname{ns}^2 \left\{ \frac{D-d}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad [B.3]$$

als  $\delta < L$        $\zeta_L = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{L-\delta}{L} K(\mu) | \mu \right\}$

Als er een damwand aanwezig is kan gewerkt worden met de lengte ervan. Indien punt  $\mathcal{L}$  op de bovenrand ligt wordt  $\delta$  gebruikt.

Bij punt  $\mathcal{K}$  zit een sprong als de ondoorlatende laag van de voorbuurman hoger ligt dan die van het fragment zelf. De positie van punt  $\mathcal{K}$  is dan gelijk aan damwandlengte plus opening onder de damwand. De afstanden van het voorafgaande fragment zijn aangeduid met een accent:

$$\zeta_K = \operatorname{dn}^2 \left\{ -i \frac{d+D'-\ell'}{L} K(\mu) | \mu \right\} = \operatorname{ns}^2 \left\{ \frac{D-d-D'+\ell'}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad [B.4]$$

als  $\delta < L$        $d = \ell' = 0$

als  $D-d < D'-\ell'$        $\zeta_K = \infty$

Ook hier is gebruik gemaakt van de bovenste relatie van [B.2]. Bij het afmeten van de positie van punt  $\mathcal{K}$  speelt de werkelijke lengte van de damwand een rol. Daarom is de conditie van het eventueel ontbreken ervan ingebouwd. Voorts moet erop gelet worden dat een niet geheel dichte bovenrand moet corresponderen met het vorige fragment, omdat anders een onrealistische stroming ontstaat. Merk op dat dit verwerkt is in de middelste regel. Als er geen verspringing is valt  $\mathcal{K}$  met  $\mathcal{A}$  samen. De functie van de bron  $Q$  is het simuleren van een gat bij de bovenrand. Zo'n bron kan nog veel meer, zoals het vormen van een erosiekanaal bij onderloopsheid. Hier is dat niet aan de orde en er zullen dan ook geen voorzieningen worden getroffen om de plaats van zo'n kanaal aan te geven. De positie van de laagste bovenrand kan uit de huidige maatvoering worden bepaald.

De gatrand krijgt de index  $\zeta_G$  mee. Deze valt samen met de positie van de laagste bovenrand:

$$\zeta_G = \operatorname{dn}^2 \left\{ -i \frac{d-\ell'}{L} K(\mu) | \mu \right\} = \operatorname{ns}^2 \left\{ \frac{D-d+\ell'}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad [B.5]$$

als  $d < \ell'$   $\zeta_G = 1$

Natuurlijk kan er alleen maar sprake zijn van een gat als er ook een damwand is:  $\delta > L$ . De bovenste relatie van [B.2] is gebruikt.

De halve breedte van het gat wordt aangegeven met  $r$ . De positie van het gat zit dus de afstand  $r$  onder de rand. De grootte van het gat is ongeveer  $2r$ ; niet precies omdat de potentiaallijnen rond het gat alleen bij benadering cirkels zijn. De uitdrukking [B.5] kan worden overgenomen met de kleine offset  $r$ . Er volgt:

$$\zeta_Q = \operatorname{dn}^2 \left\{ -i \frac{r+d-\ell'}{L_R} K(\mu) | \mu \right\} = \operatorname{ns}^2 \left\{ \frac{D-r-d+\ell'}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad [B.6]$$

als  $d < \ell'$   $\zeta_Q = \operatorname{ns}^2 \left\{ \frac{D-r}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\}$

Punt  $\mathcal{M}$  gedraagt zich soortgelijk als punt  $\mathcal{L}$  en mag zowel op de bovenrand als op de verticale rand liggen. Uitwerking geschiedt analoog, maar wel gepiegeld aan die voor punt  $\mathcal{L}$ . Immers, er wordt nu gemeten vanuit punt  $\mathcal{B}$  in plaats van  $\mathcal{C}$ . Er geldt voor punt  $\mathcal{M}$ :

$$\zeta_M = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{L-i\ell}{L} K(\mu) | \mu \right\} = (1-\mu) \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D-\ell}{D} K(1-\mu) | 1-\mu \right\} \quad [B.7]$$

als  $\lambda < L$   $\zeta_M = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{\lambda}{L} K(\mu) | \mu \right\}$

$\lambda$  is de totale lengte van bovenrand plus sprong. Dit wordt ideaal weergegeven door de complexe notatie  $L - i\ell$ . Omdat we nu op de andere rand zitten is de onderste relatie van [B.2] toegepast.

Het laatste punt van belang is  $\mathcal{N}$ . Dit punt vertoont grote overeenkomst met  $\mathcal{K}$  op dezelfde wijze als  $\mathcal{M}$  met  $\mathcal{L}$ . Alleen moet er nu informatie van het opvolgende fragment geleend worden. De maten hiervan geven we met een dubbel-accent. Ook nu is een conditie ingebouwd voor het eventueel gesitueerd zijn van punt  $\mathcal{M}$  op de bovenrand. Indien dit zo is, geldt dit ook voor het opvolgende fragment. Als er geen verspringing is valt  $\mathcal{N}$  met  $\mathcal{D}$  samen. Er geldt:

$$\zeta_N = \operatorname{dn}^2 \left\{ \frac{L - i(\ell + D'' - d'')}{L} K(\mu) \middle| \mu \right\} = (1 - \mu) \operatorname{sn}^2 \left\{ \frac{D - \ell - D'' + d''}{D} K(1 - \mu) \middle| 1 - \mu \right\}$$

$$\text{als } \lambda < L \quad \ell = d'' = 0 \quad [B.8]$$

$$\text{als } D - \ell < D'' - d'' \quad \zeta_N = 0$$

Hiermee zijn alle van belang zijnde punten gespecificeerd. De aanpak garandeert in ieder geval dat de fragmenten onder alle omstandigheden goed op elkaar aansluiten. Dit is evenwel niet voldoende voor een realistisch ontwerp. Additioneel moet bijvoorbeeld gecontroleerd worden of de lengte van damwand en bovenrand korter is dan die van bovenrand en pakketdikte. Voorts moeten op elkaar aansluitende punten  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{M}$  beide of op de bovenrand liggen of op een verticale rand.

Nu al deze waarden vastgelegd zijn is het bepalen van de parameter, karakteristiek en gatrand niet moeilijk meer. Voor deze grootheden geldt met behulp van [B.1] en *Figuur 5.1*:

$$\frac{1}{m} = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_L - \zeta_N}{\zeta_L - \zeta_K} \quad \frac{1}{n} = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_Q - \zeta_N}{\zeta_Q - \zeta_K} \quad w_G = \frac{\zeta_M - \zeta_K}{\zeta_M - \zeta_N} \frac{\zeta_G - \zeta_N}{\zeta_G - \zeta_K} \quad [B.9]$$

De hierboven bepaalde waarden kunnen hierin worden ingevuld.

## C Voorbeelden programmatuur

Een momentopname van het spread-sheet programma is hieronder gepresenteerd. Het bovenste blok rekent alle behandelde grootheden uit, inclusief elliptische integralen van de tweede en derde soort, mits  $0 < n < m$ . Het onderste blok concentreert zich op de complementaire volledige elliptische integraal van de derde soort, indien  $m < n < 1$ . Een onvolledige integraal van de derde soort is in het laatste gebied niet toegankelijk voor de methode van het aritmetisch-geometrisch gemiddelde.

Let erop dat de waarden in de kolommen voor  $a$  en  $b$  al heel snel gelijk worden. In dit voorbeeld zouden vier iteratieslagen in plaats van tien tot een even goed antwoord leiden. Het toont de grote kracht van de methode van het aritmetisch-geometrisch gemiddelde.

Voor de ontwikkelde Delphi bibliotheek is een rekenplankje gemaakt om te controleren of de bepaalde waarden juist zijn. Dit gereedschap is gepresenteerd op de volgende bladzijde. Uit vergelijking met getabelleerde rekenresultaten in [Abramowitz, Stegun 1968] blijkt een hoge mate van betrouwbaarheid. Het rekenplankje is daarnaast een leuk hulpmiddel om even snel een elliptische waarde zichtbaar te maken. Interpoleren tussen twee waarden in tabellen is dan niet meer nodig.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1					a	b	$\phi$	$e$	Z	$e+\phi$	$e-\phi$	$\Theta$
2	n	0.600	[ ]	0	1.000000	0.600000	0.52360	1.10716	0.224148	1.741446	0.71426	0.222894
3	$\phi$	30.00	[DEG]	1	0.760000	0.707107	0.80463	1.89256	0.474342	2.67987	1.12327	-0.018089
4	m	0.750	[ ]	2	0.728653	0.728238	1.67983	3.80318	-0.026352	5.38280	2.22314	-0.000004
5				3	0.728396	0.728396	3.15966	7.60316	0.000306	10.76581	4.44649	0.000000
6	$\beta$	1.30539		4	0.728396	0.728396	6.31932	16.21290	0.000000	21.53162	8.89298	0.000000
7	$e$	63.4349		5	0.728396	0.728396	12.63865	30.42460	0.000000	43.06323	17.78597	0.000000
8	v	0.54223		6	0.728396	0.728396	25.27726	60.84920	0.000000	86.12647	35.57194	0.000000
9				7	0.728396	0.728396	50.55453	121.69340	0.000000	172.25293	71.14387	0.000000
10	$\Pi$	0.67414		8	0.728396	0.728396	101.10906	243.59680	0.000000	344.60586	142.28775	0.000000
11	K'	2.16652		9	0.728396	0.728396	202.21911	486.79361	0.000000	689.01172	284.57549	0.000000
12				10	0.728396	0.728396	404.43623	973.58722	0.000000	1378.02344	569.15099	0.000000
13												
14												
15					a	b	$e$	Z				
16	n	0.600	[ ]	0	1.000000	0.668026	1.10716	0.054794				
17	m	0.750	[ ]	1	0.939013	0.939006	2.15436	0.111803				
18				2	0.931809	0.931808	4.50988	-0.002216				
19				3	0.931808	0.931808	8.61978	0.000001				
20	$\beta$	1.15632		4	0.931808	0.931808	17.23952	0.000000				
21	$e$	63.4349		5	0.931808	0.931808	34.47905	0.000000				
22				6	0.931808	0.931808	68.95810	0.000000				
23				7	0.931808	0.931808	137.91620	0.000000				
24	$\Pi$	5.61206		8	0.931808	0.931808	275.83239	0.000000				
25	K'	1.68575		9	0.931808	0.931808	551.66479	0.000000				
26				10	0.931808	0.931808	1103.32958	0.000000				

Elliptic Functions			
<input type="text" value="0.2500000000"/>	<input type="text" value="30.000000000"/>	<input type="text" value="0.0179723870"/>	<input type="text" value="0.3000000000"/>
parameter	angle	nome	characteristic
first kind	second kind	third kind	real period
<input type="text" value="1.6857503548"/>	<input type="text" value="1.4674622093"/>	<input type="text" value="2.0277924458"/>	
<input type="text" value="2.1565156475"/>	<input type="text" value="1.2110560276"/>	<input type="text" value="2.6566396324"/>	imaginary period

Elliptic Integrals			<input type="text" value="30.000000000"/>
first kind	second kind	third kind	amplitude
<input type="text" value="0.5294286271"/>	<input type="text" value="0.5179819349"/>	<input type="text" value=""/>	real period
<input type="text" value="0.5422291098"/>	<input type="text" value="0.5060920725"/>	<input type="text" value="0.5573915285"/>	imaginary period

Jacobi Functions			<input type="text" value="0.5000000000"/>
sn	cn	dn	argument
<input type="text" value="0.7320509076"/>	<input type="text" value="0.6812500386"/>	<input type="text" value="0.9306049591"/>	real period
<input type="text" value="0.8164965809"/>	<input type="text" value="0.5773502692"/>	<input type="text" value="0.7071067812"/>	imaginary period